Opgaven week 1

Opgave 1.
(Opgave 1.1.21 in het dictaat) Zij V een vectorruimte, $u, v, w \in V$ en $a \in \mathbb{R}$. Bewijs (vanuit de axioma's uit de definitie van een vectorruimte):

(1) $a.0 = 0$ (waarbij $0 =$ de nulvector in V).

(2) als $u + v = u + w$, dan $v = w$.

(3) $-(-v) = v$.

(4) $-(av) = (-a)v = a(-v)$ en $(-a)(-v) = av$.

(5) als $av = 0$, dan $a = 0$ of $v = 0$.

Opgave 2.
(Opgave 1.1.18 in het dictaat) Zij V een vectorruimte en $v_1, \ldots, v_n$ vectoren uit V. Een vector van de vorm $c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$, waarbij $c_1, \ldots, c_n$ reële getallen zijn, heet een *lineaire combinatie* van $v_1, \ldots, v_n$. De verzameling van alle lineaire combinaties van $v_1, \ldots, v_n$ noteren we met $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Bewijs dat $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ een lineaire deelruimte van V is (en dus een vectorruimte). Deze ruimte heet het *opspansel* van $v_1, \ldots, v_n$.

Opgave 3.
Zij V een vectorruimte en laten U en W lineaire deelruimtes van V zijn.

(i) Laat zien dat de vereniging $U \cup W$ alleen maar een lineaire deelruimte van V is als $U \subseteq W$ of $W \subseteq U$.

(ii) Bewijs of weerleg: $D := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 = y^2 \right\}$ is een vectorruimte.

Opgave 4.

(i) Zij V de vectorruimte der functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (zie voorbeeld 1.1.10 in het dictaat) en zij U de verzameling der functies van de vorm

$$f(t) = A \sin(t + B) \text{ met } A, B \in \mathbb{R}.$$

Laat zien dat U een lineaire deelruimte van V is.

(Hint: Er geldt $\sin(a + b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.)

(ii) Voor $c \in \mathbb{R}$ zij $U_c := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = c \right\}$. Voor welke $c \in \mathbb{R}$ is U_c een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^3$?

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_07/la2.html