Opgaven week 2

Opgave 5.
(Opgave 1.2.12 in het dictaat) Zij $(v_1, \ldots, v_n)$ een afhankelijk stelsel. Laat zien dat er een index i is zo dat v_i een lineaire combinatie van de voorafgaande vectoren is, d.w.z. zdd $v_i = c_1 v_1 + \ldots + c_{i-1} v_{i-1}$ voor zekere $c_1, \ldots, c_{i-1}$ in $\mathbb{R}$.

Opgave 6.
Zij $\mathrm{Pol}(n)$ de vectorruimte van polynomen van graad hoogstens n (zie voorbeeld 1.1.7 in het dictaat).

i) Zij $p_1(t) := 1 - 2t + t^2$, $p_2(t) := 4 + 4t + t^2$ en $p_3(t) := 2 + 3t + t^2$. Is $(p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ een onafhankelijk stelsel in $\mathrm{Pol}(2)$?

ii) Laat zien dat $(b_0(t), b_1(t), b_2(t), b_3(t))$ met $b_k(t) := (1+t)^k$ een basis voor $\mathrm{Pol}(3)$ is.

Opgave 7.
(Opgave 1.2.17 in het dictaat) Zij V een vectorruimte en $v_1, \ldots, v_n$ vectoren in V. Bewijs dat de volgende uitspraken gelijkwaardig zijn:

i) $(v_1, \ldots, v_n)$ is een basis van V.

ii) $(v_1, \ldots, v_n)$ is een minimaal volledig stelsel, d.w.z. voor iedere index i is het stelsel $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ geen volledig stelsel meer.

iii) $(v_1, \ldots, v_n)$ is een maximaal onafhankelijk stelsel, d.w.z. voor iedere vector v_{n+1} is het stelsel $(v_1, \ldots, v_n, v_{n+1})$ een afhankelijk stelsel.

Opgave 8.
Zij V een vectorruimte en $(v_1, \ldots, v_n)$ een basis van V. Voor $1 \le i \le n$ zij w_i de lineaire combinatie

$$w_i := a_{1i} v_1 + a_{2i} v_2 + \cdots + a_{ni} v_n$$

waarbij $A = (a_{ij})$ een $n \times n$ matrix is.
Laat zien: $(w_1, \ldots, w_n)$ is een basis voor $V \Leftrightarrow A$ is inverteerbaar.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/∼souvi/la2_07/la2.html