Opgaven week 3

Opgave 9.
Zij V een n-dimensionale vectorruimte en laten $(v_1, \ldots, v_n)$ en $(u_1, \ldots, u_n)$ twee bases van V zijn. Laat zien dat er voor iedere vector v_i uit de eerste basis een vector u_j uit de tweede basis bestaat zo dat $(v_1, \ldots, v_{i-1}, u_j, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ een basis van V is.

Opgave 10.
(Opgave 1.3.11 in het dictaat) Zij V een n-dimensionale vectorruimte en laten U en W lineaire deelruimten van V zijn. De *som* van twee lineaire deelruimten is volgens 1.3.10 gedefinieerd door

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

i) Laat zien dat $U + W$ een lineaire deelruimte van V is (en dus een vectorruimte).

ii) Zij $(u_1, \ldots, u_m)$ een volledig stelsel voor U en $(w_1, \ldots, w_r)$ een volledig stelsel voor W. Laat zien dat $(u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_r)$ een volledig stelsel voor $U + W$ is, d.w.z. $U + W$ is het opspansel van de vereniging van volledige stelsels van U en W.

iii) Laat zien dat $U+W$ de kleinste deelruimte van V is die $U \cup W$ bevat, d.w.z. voor iedere deelruimte V' van V die U en W bevat geldt $U + W \subseteq V'$.

Opgave 11.
Zij V een n-dimensionale vectorruimte en laten $U_1, U_2, \ldots, U_k$ lineaire deelruimten van dimensie $n-1$ van V zijn. Laat zien dat $\dim(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k) \geq n - k$. (Hint: Gebruik inductie en stelling 1.3.12.)

Opgave 12.
In Pol(4) zijn de volgende polynomen gegeven:

$$p_1(t) = 1 + t, \quad p_2(t) = 1 + t + t^2, \quad p_3(t) = 1 + t^2 + t^4, \quad p_4(t) = 1 + t^4;$$
$$p_5(t) = -t + t^2 + t^4, \quad p_6(t) = t + t^2, \quad p_7(t) = t^4, \quad p_8(t) = -t + 5t^2.$$

Laten $U := \langle p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t) \rangle$ en $W := \langle p_5(t), p_6(t), p_7(t), p_8(t) \rangle$ lineaire deelruimten van Pol(4) zijn.

i) Bepaal de dimensies $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U \cap W)$ en $\dim(U + W)$.

ii) Bepaal een basis van $U \cap W$ en bases van U, W en $U + W$ die uitbreidingen van deze basis zijn.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_07/la2.html