Opgaven week 4

Opgave 13.

i) Bewijs of weerleg (door een tegenvoorbeeld) dat de volgende afbeeldingen lineair zijn:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x \\ 3x \end{pmatrix}$;

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2x - y \\ x \end{pmatrix}$;

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x + 1 \\ 2y \\ x + y \end{pmatrix}$;

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x^2 \\ 2y \\ x + y \end{pmatrix}$;

e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z \\ x + y \end{pmatrix}$;

f) $f : \mathrm{Pol}(n) \to \mathrm{Pol}(n) : p(x) \to p(x+1)$;

g) $f : \mathrm{Pol}(n) \to \mathrm{Pol}(n) : p(x) \to p(x) + 1$;

ii) Geef, indien deze bestaat, een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aan met

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zo dat

a) f een isomorfisme is;

b) f geen isomorfisme is.

Hint: Het is natuurlijk voldoende de beelden van f op een basis van $\mathbb{R}^3$ aan te geven.

Opgave 14.
Zij $(v_1, \ldots, v_n)$ een basis van de vectorruimte V en zij $f : V \to W$ een lineaire afbeelding. Toon aan dat de volgende uitspraken gelijkwaardig zijn:

i) $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ is een basis van $\mathrm{Im}\, f$.

ii) f is een isomorfisme tussen V en $\mathrm{Im}\, f$.

Opgave 15.
Zij V een n-dimensionale vectorruimte en zij $U \subset V$ een lineaire deelruimte.

i) De verzameling $\overline{v} := v + U := \{v + u \mid u \in U\}$ heet een *restklasse* van v (naar U). Laat zien dat twee restklassen of gelijk of disjunct zijn, preciezer:

$$\text{voor } v_1, v_2 \in V \text{ is } \overline{v_1} \cap \overline{v_2} = \begin{cases} \overline{v_1} = \overline{v_2} & \text{als } v_1 - v_2 \in U \\ \emptyset & \text{anders.} \end{cases}$$

M.a.w. voor iedere $v' \in \overline{v}$ is $\overline{v'} = \overline{v}$.

ii) Laat zien dat de verzameling $\overline{V}$ der restklassen met de van V geïnduceerde bewerkingen een vectorruimte vormt, d.w.z. met

$$\overline{v_1} + \overline{v_2} := \overline{v_1 + v_2} \quad \text{en} \quad c.\overline{v} := \overline{c.v}.$$

Hierbij is het cruciale punt, aan te tonen dat de bewerkingen welgevormd zijn: voor v_1', v_2' met $\overline{v_1'} = \overline{v_1}$ en $\overline{v_2'} = \overline{v_2}$ moet $\overline{v_1' + v_2'} = \overline{v_1 + v_2}$ zijn (analoog voor de scalairvermenigvuldiging).

iii) Bewijs dat $\dim \overline{V} = \dim V - \dim U$.

Opgave 16.
Zij V een n-dimensionale vectorruimte en zij $f : V \to W$ een lineaire afbeelding.

i) Voor $w \in \operatorname{Im} f$ heet iedere vector $v \in V$ met $f(v) = w$ een *origineel* van w (zie definitie 2.1.1). Laat zien dat de originelen van $w \in \operatorname{Im} f$ een restklasse naar $\ker f$ vormen, namelijk $\overline{v} = \{v + u \mid u \in \ker f\}$ voor een origineel v van w. Ga na dat de keuze van v hierbij geen verschil maakt.

ii) Zij $\overline{f} : \overline{V} \to W$ gedefinieerd door

$$\overline{f}(\overline{v}) := f(v).$$

Laat zien dat $\overline{f}$ een welgevormde lineaire afbeelding is. Naast de lineariteit is hierbij in eerste instantie aan te tonen dat voor v en v' met $\overline{v} = \overline{v'}$ geldt dat $f(v) = f(v')$.

iii) Bewijs dat $\overline{f}$ een isomorfisme van $\overline{V}$ op $\operatorname{Im} f$ is. Concludeer hieruit het bekende feit dat $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_07/la2.html