Opgaven week 5

Opgave 17.
Zij $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ en $B \in M_{n,r}(\mathbb{R})$.

i) Bewijs dat $\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} A$ en $\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} B$.

ii) Stel dat $n = r$ en neem aan dat B inverteerbaar is. Laat zien dat in dit geval $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A$ is.

Geldt ook de omkering, d.w.z. $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} A \Rightarrow B$ inverteerbaar?

iii) Stel dat $m = n$ en neem aan dat A inverteerbaar is. Laat zien dat in dit geval $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} B$ is.

Geldt ook de omkering, d.w.z. $\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} B \Rightarrow A$ inverteerbaar?

Opgave 18.
Voor $A \in M_n(\mathbb{R})$ zij de afbeelding $C_A : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ gedefinieerd door

$$C_A(X) := AX - XA.$$

i) Laat zien dat C_A een lineaire afbeelding is.

ii) Zij $n = 3$ en $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bepaal $\ker C_A$ en $\operatorname{Im} C_A$.

iii) Zij A zo als in deel ii). Laat zien dat $\ker C_A + \operatorname{Im} C_A = M_3(\mathbb{R})$. Schrijf $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ in de vorm $X = X_1 + X_2$ met $X_1 \in \ker C_A$, $X_2 \in \operatorname{Im} C_A$.

Opgave 19.
Zij $V = \operatorname{Pol}(3)$ de vectorruimte der polynomen van graad hoogstens 3.

i) Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking $t\, p'(t) - p(t+1) = 0$ in V.

Hint: Laat zien dat $p(t) \to t\, p'(t) - p(t+1)$ een lineaire afbeelding is en bepaal de kern hiervan.

ii) Laat zien dat de differentiaalvergelijking $p''(t) + p(t) = q(t)$ voor iedere $q(t) \in V$ een eenduidige oplossing in V heeft.

Hint: Het is niet nodig, de oplossing expliciet te bepalen.

Opgave 20.
Bij een vaak gebruikte projectie $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wordt de standaardbasis als volgt afgebeeld:

$$\pi(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \pi(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0.5\\0.3\end{pmatrix}, \quad \pi(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

i) Geef de 2×3 matrix A met $\pi = f_A$ aan.

ii) Bepaal het beeld van een kubus met hoekpunten $\begin{pmatrix}\pm 1\\\pm 1\\\pm 1\end{pmatrix}$ bij deze projectie. Bereken de beelden van de hoekpunten en maak een plaatje van de projectie van de kubus.

iii) Bereken de kern van de projectie π. Geef een (meetkundige) interpretatie van de kern.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_07/la2.html