# Opgaven week 6

**Opgave 21.**
Voor een $n \times n$ matrix $A$ definiëren we het *spoor* van $A$, genoteerd met $\operatorname{tr} A$ (van het Engelse *trace*) door

$$\operatorname{tr} A := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

d.w.z. de som der diagonaal elementen van $A$.
Zij $A$ een $n \times n$ matrix en $T$ een basistransformatie van $\mathbb{R}^n$, d.w.z. een inverteerbare $n \times n$ matrix. Uit LA1 weten we dat $\det(T^{-1}AT) = (\det T)^{-1} \cdot \det A \cdot \det T = \det A$. M.a.w. de determinant is een *invariant* van de lineaire afbeelding $f = f_A$ die niet van de keuze van de basis afhangt, want bij een basistransformatie blijft de determinant hetzelfde.
Laat zien dat net zo geldt dat

$$\operatorname{tr}(T^{-1}AT) = \operatorname{tr} A$$

Dit betekent dat ook het spoor een invariant van de lineaire afbeelding is.
Hint: Er zijn twee standaard manieren om dit aan te tonen:

a) Laat zien dat $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ voor alle $n \times n$ matrices $A$ en $B$.

b) Laat zien dat $-\operatorname{tr} A$ de coëfficiënt van $x^{n-1}$ in $\det(xI_n - A)$ is (zie opgave 22 LA1) en ga na dat $\det(xI_n - A) = \det(xI_n - T^{-1}AT)$.

**Opgave 22.**
De kubus met hoekpunten $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ wordt zo om de as door $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d.w.z. om een van zijn ruimtediagonalen) gedraaid dat hij weer hetzelfde uitziet. Voor deze rotatie zijn er twee mogelijkheden, waarvan we degene kiezen waarbij het punt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ naar $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gaat (de andere mogelijkheid is de rotatie in de omgekeerde richting).

i) Toon aan dat de vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ een onafhankelijk stelsel en dus een basis voor $\mathbb{R}^3$ vormen.
Dit is een geschikte basis om de rotatie te beschrijven omdat deze drie punten de punten zijn die in de kubus met $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verbonden zijn en daarom bij de rotatie onder elkaar verwisseld moeten worden.

ii) Bepaal de matrix van deze rotatie m.b.t. de in deel i) gekozen basis.

iii) Bepaal de beelden van de twee punten $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ (middelpunt van een zijvlak) en $\begin{pmatrix}0.5\\0.3\\0.2\end{pmatrix}$ (punt ergens binnen de kubus) onder de rotatie.

iv) Bepaal de matrix van deze rotatie m.b.t. de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$.

**Opgave 23.**
Bepaal de matrices ${}_B f_B$ en ${}_C f_C$ van alle lineaire afbeeldingen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met

$$\ker f = \operatorname{Im} f = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

voor

i) de standaardbasis $B = \left( \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right)$;

ii) de basis $C = \left( \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right)$.

**Opgave 24.**
Zij $SL_2 := \left\{ \begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x + w = 0 \right\}$.

i) Laat zien dat $SL_2$ een lineaire deelruimte van $M_2(\mathbb{R})$ is.

ii) Bepaal de dimensie en een basis $B$ van $SL_2$.

iii) Laat zien dat voor $A \in M_2(\mathbb{R})$ en $X \in SL_2$ geldt dat $AX - XA \in SL_2$ is. Concludeer dat $C_A : X \to AX - XA$ een lineaire afbeelding $SL_2 \to SL_2$ is.

iv) Bepaal voor $A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ de matrix ${}_B(C_A)_B$ van de lineaire afbeelding $C_A$ m.b.t. de basis $B$ uit deel ii).

v) Is er een $A \in M_2(\mathbb{R})$ zo dat $C_A$ een bijectieve afbeelding is? Geef voorbeelden van matrices $A$ zo dat $\operatorname{Im} C_A$ resp. dimensie 0, 1 en 2 heeft.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_07/la2.html