Opgaven week 7

Opgave 25.
Zij V een vectorruimte met inproduct en zij $v, w \in V$. Bewijs dat

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Deze gelijkheid heet de *parallellogram-gelijkheid*. Geef een formulevrije formulering van deze gelijkheid, analoog met de formulering van de stelling van Pythagoras: "In een rechthoekige driehoek is het vierkant op de schuine zijde gelijk aan de som der vierkanten op de twee rechthoekzijden."

Opgave 26.
Laten $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vectoren in $\mathbb{R}^2$ zijn.

i) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ definieert de afbeelding

$$\langle v, w \rangle := x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + a x_2 y_2$$

een inproduct op $\mathbb{R}^2$?

ii) Voor welke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ definieert de afbeelding

$$\langle v, w \rangle := a x_1 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_1 + d x_2 y_2$$

een inproduct op $\mathbb{R}^2$?

Opgave 27.
Zij V een inproductruimte en $B = (v_1, \ldots, v_n)$ een basis van V. We noemen de $n \times n$ matrix F met $F_{ij} := \langle v_i, v_j \rangle$ de *Gram matrix* of *metrische tensor* van V t.o.v. de basis B.

i) Laten $v, w \in V$ vectoren zijn met coördinaatvectoren $x =_B v$ en $y =_B w$ Laat zien dat

$$\langle v, w \rangle = x^t \cdot F \cdot y.$$

ii) Zij $C = (w_1, \ldots, w_n)$ een andere basis van V en zij $T =_B 1_C$ de basistransformatie van C naar B, d.w.z. de i-de kolom T_i van T is de coördinaatvector ${}_B w_i$ t.o.v. de basis B. Laat zien dat

$$F' = T^t \cdot F \cdot T$$

de Gram matrix van V m.b.t. de basis C is.

Opgave 28.

Zij $V := \{v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid x + y + z + w = 0\} \subset R^4$, dan is V een 3-dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}^4$ en $\left(v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ is een voor de hand liggende basis van V (dit hoef je niet te bewijzen).
Bepaal een orthogonale basis van V (t.o.v. het standaard inproduct).

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_07/la2.html