Opgaven week 8

Opgave 29.
Zij V een inproductruimte (niet noodzakelijk eindig dimensionaal) en zij $U \subset V$ een lineaire deelruimte.

i) Laat zien dat $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$.

ii) Bewijs dat $U = (U^{\perp})^{\perp}$ als V eindig dimensionaal is.

iii) Geef een voorbeeld van een inproductruimte V en een deelruimte U zo dat $U \subsetneqq (U^{\perp})^{\perp}$.

Voorstel: Zij $V = \text{Pol} = \cup_{n=1}^{\infty}\text{Pol}(n)$ de vectorruimte van alle polynomen. Dan wordt V een inproductruimte door

$$\langle p, q\rangle := a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k$$

voor $p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $q = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ en $k = \min(n, m)$.

Zij verder

$$U := \{p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0\} \subseteq V$$

de verzameling der polynomen met coëfficiëntensom nul. Dan is U (als kern van de lineaire afbeelding $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mapsto a_0 + a_1 + \cdots + a_n$) een lineaire deelruimte en $U \subsetneqq V$ omdat bijvoorbeeld $1 \notin U$.

Ga na dat $U^{\perp} = \{0\}$ en concludeer hieruit dat $(U^{\perp})^{\perp} = V \supsetneqq U$.

Opgave 30.
Zij U een lineaire deelruimte van een eindig dimensionale inproductruimte V. Voor $v \in V$ zij $\text{proj}_U(v)$ de projectie van v op U.

i) Laat zien dat de afbeelding $\pi_U : V \to U : v \mapsto \text{proj}_U(v)$ een lineaire afbeelding is en dat $\text{Im}\,\pi_U = U$ en $\ker \pi_U = U^{\perp}$.

ii) Laat zien dat $\pi_U \circ \pi_U = \pi_U$, d.w.z. de samenstelling van de projectie met zich zelf is weer de projectie.

iii) Zij $\pi' := 1_V - \pi_U$, d.w.z. $\pi'(v) = v - \pi_U(v)$. Laat zien dat $\pi' \circ \pi' = \pi'$ en bewijs dat $\pi'(v) = \text{proj}_{U^{\perp}}(v)$, d.w.z. $1_V - \pi_U$ is de projectie op het complement $U^{\perp}$ van U.

Opgave 31.
Een tetraëder (regelmatige piramide met driehoekig grondvlak) is gegeven door zijn hoekpunten

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Verder zij U het 2-dimensionale vlak opgespannen door de vectoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

i) Bereken de projecties van de hoekpunten A, B, C en D in het vlak U.

ii) Teken de projectie van de tetraëder in het vlak U.

iii) Wat zijn de afstanden van de hoekpunten A, B, C en D van het vlak U?

Opgave 32.
Door $n > 3$ punten (x_i, y_i) loopt in het algemeen geen parabool, dus is dit een typische situatie voor een kleinste kwadraten oplossing. Gezocht is in zo'n geval de parabool $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ zo dat $\sum_{i=1}^{n}(p(x_i) - y_i)^2$ minimaal is.
Bepaal de kleinste kwadraten oplossing van een parabool voor de vier punten $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 8)$ (die natuurlijk op de functie 2^x liggen).

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_07/la2.html