Tentamen Lineaire Algebra 2

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!

Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan.

Opgave 1. (12 punten)
Zij $M_2(\mathbb{R})$ de vectorruimte der 2×2 matrices.
Zij $U := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ en $W := \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$.

(i) Laat zien dat U en W lineaire deelruimten van $M_2(\mathbb{R})$ zijn.

(ii) Bewijs dat $U \cap W = \{0\}$.

(iii) Bepaal $\dim U$ en $\dim W$ een geef een basis van U en een basis van W aan.

(iv) Toon aan dat $U + W = M_2(\mathbb{R})$.

(v) Schrijf $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ in de vorm $A = u + w$ met $u \in U$ en $w \in W$.

Opgave 2. (13 punten)

(i) Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2y - 3z \\ 3z - x \end{pmatrix}.$$

Bepaal een basis van $\ker f$ en een basis van $\operatorname{Im} f$.

(ii) Laat zien dat voor f uit deel (i) geldt dat $f(\operatorname{Im} f) \subseteq \operatorname{Im} f$ en dat de afbeelding $v \mapsto f(v)$ een isomorfisme van $\operatorname{Im} f$ is.

(iii) Van een lineaire afbeelding $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is bekend dat

$$g(\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad g(\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2x \end{pmatrix}.$$

Bepaal de matrices van g en van $g \circ g$ m.b.t. de standaardbasis van $\mathbb{R}^2$.

z.o.z.

Opgave 3. (13 punten)
Zij $V := \mathrm{Pol}(2) = \{a+bx+cx^2 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ en zij $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door
$$\langle f, g\rangle := f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

(i) Laat zien dat $\langle\ ,\ \rangle$ een inproduct op de vectorruimte V definieert.

(ii) Bepaal een orthogonale basis van V (m.b.t. het gegeven inproduct).

(iii) Zij $U = \mathrm{Pol}(1) = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset V$. Bepaal de kleinste afstand die $f(x) = 1 + x + x^2$ tot een vector in U heeft.

Opgave 4. (12 punten)
Bewijs of weerleg met een tegenvoorbeeld de volgende beweringen:

(i) Zij $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$. Dan is (v_1, v_2, v_3, v_4) een basis van $\mathbb{R}^4$ d.e.s.d.a. $(v_1, -2v_2, 3v_3, -4v_4)$ een basis van $\mathbb{R}^4$ is.

(ii) Zij $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{R})$ met $\operatorname{rang} A \leq \operatorname{rang} C$ en $\operatorname{rang} B \leq \operatorname{rang} D$. Dan is $\operatorname{rang} AB \leq \operatorname{rang} CD$.

(iii) Zij V een vectorruimte en X, Y, Z lineaire deelruimten van V. Dan geldt $X \cap (Y + Z) = (X \cap Y) + (X \cap Z)$.

(iv) Zij V een vectorruimte en X, Y lineaire deelruimten van V. Dan geldt $(X + Y)^\perp = X^\perp \cap Y^\perp$.

Succes ermee!