Tentamen Lineaire Algebra 2 (NP010B)

1 februari 2007, 14:00-17:00 uur

Naam: Studentnummer:

Opgave 1. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ de afbeelding met

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_1, x_2)$$

en zij $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de afbeelding met

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 - y_3 - y_4, y_2, 2y_2).$$

i) `(2 pnt)` Bewijs dat f en g lineaire afbeeldingen zijn.

ii) `(3 pnt)` Bewijs dat f injectief is.

iii) `(5 pnt)` Bepaal de dimensies van Im f, Ker g, Im g, Ker $g \circ f$ en Im $g \circ f$.

Tentamen Lineaire Algebra 2 (NP010B)

1 februari 2007, 14:00-17:00 uur

Naam: Studentnummer:

Opgave 2. Zij V de vectorruimte van alle continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ga van de volgende afbeeldingen van V naar zichzelf na of ze lineair zijn. Bepaal voor elke lineaire afbeelding die je aantreft de kern.

i) `(3 pnt)` $A_1 : V \to V$ met: voor $f \in V$ is $A_1 f$ de functie gedefinieerd door $(A_1 f)(x) = f(x+1)$.

ii) `(3 pnt)` $A_2 : V \to V$ met: voor $f \in V$ is $A_2 f$ de functie gedefinieerd door $(A_2 f)(x) = f(x) + 1$.

iii) `(4 pnt)` $A_3 : V \to V$ met: voor $f \in V$ is $A_3 f$ de functie gedefinieerd door $(A_3 f)(x) = f(x^2)$.

Tentamen Lineaire Algebra 2 (NP010B)

1 februari 2007, 14:00-17:00 uur

Naam: Studentnummer:

Opgave 3. Beargumenteer welke van de volgende uitspraken waar zijn en welke niet waar zijn.

i) `(2 pnt)` Zij $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dan $\mathrm{Nul}(A^t) = \mathrm{Col}(A)^\perp$.

ii) `(2 pnt)` Definieer $\langle x, y \rangle := x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2$ voor $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dan is $\langle\ ,\ \rangle$ een inproduct op $\mathbb{R}^2$.

iii) `(2 pnt)` Zij $B \in \mathrm{Mat}_{n,k}(\mathbb{R})$. Dan is $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = B\}$ een lineaire deelruimte van $M_n(\mathbb{R})$.

iv) `(2 pnt)` Zij $\{v_1, \ldots, v_k\}$ een orthogonaal stelsel in een eindigdimensionale inproductruimte V. Dan is $\dim V \geq k$.

iv) `(2 pnt)` Zij $f : V \to V$ een lineaire afbeelding zodanig dat $f(f(v)) = 0$ voor alle $v \in V$. Dan is $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$.

Tentamen Lineaire Algebra 2 (NP010B)

1 februari 2007, 14:00-17:00 uur

Naam: Studentnummer:

Opgave 4. In $\mathbb{R}^4$ beschouwen we de vectoren

$$u = (1, 1, 1, 1),\ v = (1, 2, -1, -2),\ w = (0, 2, 2, -1),\ z = (0, 0, 19, 33).$$

i) `(3 pnt)` Bereken de hoek tussen u en v.

ii) `(4 pnt)` Bepaal een orthogonale basis voor het lineaire opspansel U van $\{u, v, w\}$.

iii) `(3 pnt)` Bereken de vector in U die het dichtst bij z ligt.