Tentamen Lineaire Algebra 2 (NP010B)
1 mei 2007, 9:00-12:00 uur, HG00.062

Opgave 1. Zij V de verzameling van alle oneindige rijtjes $(a_0, a_1, \ldots)$ van reële getallen die voldoen aan

$$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) `(3 pnt)` Bewijs dat V een vectorruimte is.
(b) `(4 pnt)` Geef een basis voor V.
(c) `(3 pnt)` Zij W de verzameling van alle oneindige rijtjes $(a_0, a_1, \ldots)$ van reële getallen die voldoen aan

$$a_{n+4} = a_n \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

Laat zien dat V een lineaire deelruimte van W is en dat $V \neq W$.

Opgave 2. Zij Pol(2) de vectorruimte der veeltermen van graad ≤ 2 met coëfficiënten in $\mathbb{R}$. Voor $p \in \text{Pol}(2)$ definieer

$$F(p) = x\frac{dp}{dx} - 2p.$$

i) `(2 pnt)` Bewijs dat $F(p) \in \text{Pol}(2)$ voor elke $p \in \text{Pol}(2)$. We krijgen dus een afbeelding $F : \text{Pol}(2) \to \text{Pol}(2)$.
ii) `(2 pnt)` Bewijs dat deze afbeelding F een lineaire afbeelding is.
iii) `(3 pnt)` Bereken een basis voor Ker F.
iv) `(3 pnt)` Bereken een basis voor Im F.

Opgave 3. Beargumenteer welke van de volgende uitspraken waar zijn en welke niet waar zijn.

i) `(2 pnt)` Zij $f : V \to W$ een isomorfisme van eindigdimensionale vectorruimten. Dan $\dim V = \dim W$.
ii) `(2 pnt)` Zij $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ met $m < n$. Dan vormen de kolommen van A een afhankelijk stelsel.
iii) `(2 pnt)` Zij $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ met $m > n$. Dan vormen de kolommen van A een volledig stelsel.
iv) `(2 pnt)` Voor $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ geldt: $\text{Im}BA \subset \text{Im}B$.
v) `(2 pnt)` Voor $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ geldt: KerBA $\subset$ KerB.

Opgave 4.

i) `(4 pnt)` Zij F de vectorruimte der continue reëelwaardige functies op het interval $[-1, 1]$. Voor $f, g \in F$ zij

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} (1 - x^2) f(x) g(x)\ dx.$$

Bewijs dat $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een inproduct op F definieert.

ii) `(3 pnt)` Bepaal een orthogonale basis voor het lineaire opspansel van de functies 1, x en x^2 in F.

iii) `(3 pnt)` Bewijs dat

$$|x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 5x_3 y_3| \leq \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2}\sqrt{y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2}$$

voor alle $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$.