Tentamen Lineaire Algebra 2 (kans B)

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!
Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan,

Opgave 1. (10 punten)
Zij $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$(a, b, c, d, e) \mapsto (a + c + e,\ b + d,\ b - c).$$

(i) Bepaal een basis van $\operatorname{Ker} f$ en een basis van $\operatorname{Im} f$.

(ii) Geef een deelruimte $U \subset \mathbb{R}^5$ aan zo dat $f(U) = \operatorname{Im} f$ en zo dat de beperking van f op U een isomorfisme van U naar $\operatorname{Im} f$ is.
(Het is voldoende een basis van U aan te geven, maar je moet laten zien dat U inderdaad de gevraagde eigenschappen heeft.)

Opgave 2. (8 punten)
Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding en zij $f^2 := f \circ f$ de samenstelling van f met zich zelf.

(i) Laat zien dat $\operatorname{Im} f^2 \subseteq \operatorname{Im} f$.

(ii) Stel dat $\dim \operatorname{Im} f^2 = \dim \operatorname{Im} f$.
Bewijs dat $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ en dat $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^n$.

Opgave 3. (8 punten)
Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

inverteerbaar? Bereken voor deze waarden van a de inverse matrix A^{-1}.

z.o.z.

Opgave 4. (6 punten)
Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

(ten opzichte van een zekere basis (v_1, v_2, v_3) van $\mathbb{R}^3$).
Bewijs dat er een deelruimte $U \subset \mathbb{R}^3$ bestaat met $\dim U = 2$ en $f(U) \subset U$.

Opgave 5. (8 punten)
Laten $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ willekeurige matrices zijn. Bewijs of weerleg (door een expliciet tegenvoorbeeld) de volgende uitspraken:

(i) $\det(ABC) = \det(CBA)$.

(ii) $\det(AB - BA) = 0$.

(iii) $\det(A^{-1}BA) = \det B$ voor een inverteerbare matrix A.

(iv) $\det C^2 = 0 \Rightarrow \det C = 0$.

Opgave 6. (10 punten)
We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat een parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ bevat:

$$\begin{aligned} x + y + \lambda z &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= \lambda \\ 2x + 3y - z &= 1. \end{aligned}$$

(i) Bepaal de waarden van de parameter λ waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft.

(ii) Geef alle waarden van λ aan waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.
(Licht je antwoord toe!)

(iii) Geef alle waarden van λ aan waarvoor het stelsel niet oplosbaar is.
(Licht je antwoord toe!)

Succes ermee!