

Huiswerk week 1

Opgave 1.

Bewijs of weerleg (door een tegenvoorbeeld) dat de volgende afbeeldingen lineair zijn:

- (i) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (2x - y, x)$;
- (ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x + 1, 2y, x + y)$;
- (iii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x^2, 2y, x + y)$;
- (iv) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (z, x + y)$;
- (v) $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : g(x) \mapsto g(x + 1)$;
- (vi) $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : g(x) \mapsto g(x) + 1$;
- (vii) $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R} : g(x) \mapsto \int_0^1 g(x) dx$ voor $V := \{g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid g \text{ continu}\}$.

Opgave 2.

Geef, indien deze bestaat, een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aan met

$$f(1, 1, 1) = (3, 5, 2), \quad f(2, -1, -1) = (-6, 7, 7), \quad f(0, 1, 1) = (4, 1, -1)$$

zo dat

- (i) f een isomorfisme is;
- (ii) f geen isomorfisme is.

Hint: Het is natuurlijk voldoende de beelden van f op een basis van \mathbb{R}^3 aan te geven.

Opgave 3.

Zij $f : V \rightarrow W$ een isomorfisme van de \mathbb{F} -vectorruimten V en W . Laat zien dat de volgende *structurele eigenschappen* van V door f naar W overgebracht worden:

- (i) Als (v_1, \dots, v_r) een onafhankelijk stelsel in V is, dan is $(f(v_1), \dots, f(v_r))$ een onafhankelijk stelsel in W .
- (ii) Als (v_1, \dots, v_m) een volledig stelsel in V is, dan is $(f(v_1), \dots, f(v_m))$ een volledig stelsel in W .
- (iii) Als $U \subset V$ een lineaire deelruimte van dimensie k is, dan is $f(U)$ een lineaire deelruimte van dimensie k in W .

Opgave 4.

Zij $V := \{(a_0, a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ voor alle } i \geq 0\}$ de \mathbb{R} -vectorruimte van oneindige rijen (met componentsgewijs optellen en scalair vermenigvuldigen). We definiëren twee afbeeldingen op V als volgt:

$$\lambda : V \rightarrow V : (a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, \dots) \text{ (\lambda heet } \textit{links-shift})$$

$$\rho : V \rightarrow V : (a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots) \text{ (\rho heet } \textit{rechts-shift})$$

- (i) Laat zien dat λ en ρ lineaire afbeeldingen zijn.
- (ii) Laat zien dat de samengestelde afbeelding $\lambda \circ \rho$ de identieke afbeelding op V is, dus i.h.b. een isomorfisme.
- (iii) Laat zien dat de samengestelde afbeelding $\rho \circ \lambda$ niet surjectief is, en dus geen isomorfisme.
- (iv) Zij $U := \rho \circ \lambda(V)$. Geef U expliciet aan en ga na dat $\rho \circ \lambda$ de identieke afbeelding op U is.

Oefenopgaven week 1

Opgave I

Geef aan waarom de volgende afbeeldingen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ niet lineair zijn.

- (i) $f : (x, y) \mapsto (1, y)$;
- (ii) $f : (x, y) \mapsto (x, x^2)$;
- (iii) $f : (x, y) \mapsto (\sin x, x)$;
- (iv) $f : (x, y) \mapsto (|x|, y)$;
- (v) $f : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$;

Opgave II

Ga na of de volgende lineaire afbeeldingen injectief, surjectief of bijectief zijn.

- (i) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x - y, 2z)$;
- (ii) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x - y, 0, 2x - y)$;
- (iii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x - y, z, 2x - y)$;

Opgave III

- (i) Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de (eenduidige) lineaire afbeelding met $f((1, 0)) = (1, 4)$ en $f((1, 1)) = (2, 5)$. Is f injectief, surjectief of bijectief? Wat is $f((2, 3))$?

- (ii) Zij $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de (eenduidige) lineaire afbeelding met $f((1, 1)) = (1, 0, 2)$ en $f((2, 3)) = (1, -1, 4)$. Is f injectief, surjectief of bijectief? Wat is $f((8, 11))$?
- (iii) Is er een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $f((1, 0, 3)) = (1, 1)$ en $f((-2, 0, -6)) = (2, 1)$?

Opgave IV

Zij $f : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding van de \mathbb{F} -vectorruimten V en W . Zij $v_1, \dots, v_k \in V$ en $w_1, \dots, w_k \in W$ zo dat $f(v_i) = w_i$ voor $i = 1, \dots, k$. Stel dat (w_1, \dots, w_k) een lineair onafhankelijk stelsel in $f(V)$ is. Laat zien dat dan ook (v_1, \dots, v_k) lineair onafhankelijk is.

Opgave V

Zij $V := \{f(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de vectorruimte van polynoomfuncties over \mathbb{R} .

Zij $\delta : V \rightarrow V, f(x) \mapsto f'(x)$ de lineaire afbeelding die een functie op zijn afgeleide afbeeldt en $\mu : V \rightarrow V, f(x) \mapsto x \cdot f(x)$ de vermenigvuldiging met x .

- (i) Laat zien dat δ en μ lineair zijn.
- (ii) Zijn δ en μ injectief, surjectief of bijectief?
- (iii) Geef de samenstellingen $\delta \circ \mu$ en $\mu \circ \delta$ expliciet aan. Is $\delta \circ \mu = \mu \circ \delta$?
- (iv) Zijn $\delta \circ \mu$ en $\mu \circ \delta$ injectief, surjectief of bijectief?

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_08/la2.html