Huiswerk week 2

Opgave 5.
Zij $V = Pol_3 := \{p(x) = ax^3+bx^2+cx+d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de vectorruimte der polynomen van graad hoogstens 3.

(i) Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking $x\, p'(x)-p(x+1) = 0$ in V.
(Hint: Laat zien dat $p(x) \mapsto x\ p'(x) - p(x+1)$ een lineaire afbeelding is en bepaal de kern hiervan.)

(ii) Laat zien dat de differentiaalvergelijking $p''(x) + p(x) = q(x)$ voor iedere $q(x) \in V$ een eenduidige oplossing in V heeft.
(Hint: Het is niet nodig, de oplossing expliciet te bepalen.)

Opgave 6.
Zij $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z,w) \mapsto (x+y, y-z)$.

(i) Bepaal een basis van $\operatorname{Ker} f$ en een basis van $\operatorname{Im} f$.

(ii) Zijn er lineaire afbeeldingen $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ met $g \neq cf$ voor $c \in \mathbb{R}$ (d.w.z. g is niet van de vorm $(x,y,z,w) \mapsto (c(x+y), c(y-z))$) die dezelfde kern en hetzelfde beeld als f hebben? Zo ja, geef een voorbeeld, zo nee, bewijs dat zo'n g niet bestaat.

Opgave 7.
We hebben bewezen dat voor een lineaire afbeelding $f : V \to V$ van een eindig-dimensionale vectorruimte V geldt dat $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim V$.

(i) Bepaal *alle* lineaire afbeeldingen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = L(e_1)$ (waarbij natuurlijk $e_1 = (1,0)$).

(ii) Geef voorbeelden van lineaire afbeeldingen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ met $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ (en dus ook $\dim \operatorname{Im} f = 2$) en

(a) $\dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 0$;
(b) $\dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 1$;
(c) $\dim \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = 2$.

Opgave 8.
Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte en $f : V \to V$ een lineaire afbeelding. We noteren met f^k de k-voudige samenstelling van f met zich zelf, d.w.z. $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ enz. Verder is $\operatorname{rk} f^k = \dim \operatorname{Im} f^k$.

(i) Laat zien dat $\operatorname{rk} f^{k+1} \leq \operatorname{rk} f^k$ voor $k \geq 1$.

(ii) Stel dat $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^2$. Laat zien dat $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ en concludeer dat $V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

(iii) Bewijs dat er voor een willekeurige $f : V \to V$ een natuurlijk getal k bestaat met $V = \operatorname{Ker} f^k + \operatorname{Im} f^k$.
(Hint: Laat zien dat er een k bestaat met $\operatorname{rk} f^k = \operatorname{rk} f^{2k}$ en pas deel (ii) op f^k toe.)

Oefenopgaven week 2

Opgave VI
Zij V een vectorruimte met basis $(v_1, \dots, v_n)$ en zij $f : V \to W$ een lineaire afbeelding. Toon aan dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(i) $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ is een basis van $\operatorname{Im} f$.

(ii) f is een isomorfisme tussen V en $\operatorname{Im} f$.

Opgave VII
Zij $V := \{(x, x+y, 0, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$. Laat zien dat $\dim V = 3$ en geef een isomorfisme $f : V \to \mathbb{R}^3$ expliciet aan.

Opgave VIII
Laten U, V, W vectorruimten en $f : U \to V$ en $g : V \to W$ lineaire afbeeldingen.

(i) Stel dat $g \circ f$ injectief is. Bewijs dat dan f injectief is. Moet g ook injectief zijn?

(ii) Stel dat $g \circ f$ surjectief is. Bewijs dat dan g surjectief is. Moet f ook surjectief zijn?

Opgave IX
Zij V een vectorruimte en $f : V \to V$ een lineaire afbeelding. Laat zien dat $f \circ f = 0$ (nulafbeelding) $\iff \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$.

Opgave X
Voor een lineaire afbeelding $f : V \to V$ van een eindig-dimensionale vectorruimte V hebben we gezien dat f bijectief $\Leftrightarrow$ f injectief $\Leftrightarrow$ f surjectief. Voor oneindig-dimensionale vectorruimten geldt dit niet!
Zij $V = \mathit{Pol} := \{f(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de vectorruimte van polynoomfuncties over $\mathbb{R}$.
Zij $\delta : V \to V, f(x) \mapsto f'(x)$ de lineaire afbeelding die een functie op zijn afgeleide afbeeldt en $\iota : V \to V, f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \mapsto \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \ldots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0 x$ de afbeelding die een functie op zijn primitieve met constante term 0 afbeeldt.

(i) Laat zien dat ι een lineaire afbeelding is.

(ii) Laat zien dat δ surjectief maar niet injectief is (en dus ook niet bijectief). Bepaal de kern van δ.

(iii) Laat zien dat ι injectief maar niet surjectief is (en dus ook niet bijectief). Bepaal het beeld van ι.

(iv) Ga na dat $\delta \circ \iota = Id_V$, d.w.z. $\delta \circ \iota(f) = f$ voor alle $f \in V$. Ga ook na dat $\iota \circ \delta$ noch injectief noch surjectief is.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_08/la2.html