Huiswerk week 3

Opgave 9.
Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte, $U \subset V$ een lineaire deelruimte en V/U de quotiëntenruimte van U in V.

(i) Zij $(v_1, \ldots, v_r)$ een basis van U die door de vectoren $v_{r+1}, \ldots, v_n$ tot een basis $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ van V uitgebreid wordt.

Laat zien dat $(v_{r+1} + U, \ldots, v_n + U)$ een basis van V/U is.

(ii) Zij $v_1, \ldots, v_k \in V$. Bewijs: $(v_1 + U, \ldots, v_k + U)$ is een lineair onafhankelijk stelsel in $V/U \iff \lambda_1 v_1 + \ldots, \lambda_k v_k \in U$ alleen maar voor $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

(iii) Zij $(v_1, \ldots, v_k)$ een lineair onafhankelijk stelsel in V met $v_i \notin U$. Laat zien dat $(v_1 + U, \ldots, v_k + U)$ niet noodzakelijk lineair onafhankelijk is.

Geef een expliciet voorbeeld met $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 1$ en $v_1, v_2 \notin U$ zo dat (v_1, v_2) lineair onafhankelijk maar $(v_1 + U, v_2 + U)$ lineair afhankelijk is.

Opgave 10.
Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de lineaire afbeelding gegeven door $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \ldots + x_n$.

(i) Bepaal een basis van $\operatorname{Ker} f$, een basis van $\operatorname{Im} f$, een basis van $\mathbb{R}^n/\operatorname{Ker} f$ en geef een isomorfisme van $\mathbb{R}^n/\operatorname{Ker} f$ naar $\operatorname{Im} f$ aan.

(ii) Bedenk een lineaire afbeelding $g : \mathbb{R}^n \to \operatorname{Ker} f$ zo dat $\operatorname{Ker} g$ isomorf met $\operatorname{Im} f$ is.

Opgave 11.
Bepaal de matrices van de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (2x - y, 3x + 4y, x)$;

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x + 3y - z, x + z)$;

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 2x + y - 3z$;

(iv) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + x_n$;

(v) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1)$.

Opgave 12.
Voor $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ heet $A^t \in \mathbb{F}^{n\times n}$ met ${A^t}_{ij} := A_{ji}$ de *getransponeerde matrix* van A. De getransponeerde matrix is juist de in de hoofddiagonaal gespiegelde matrix, dus voor $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ is $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

(i) Laat zien dat $f : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}, A \mapsto A + A^t$ en $g : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}, A \mapsto A - A^t$ lineaire afbeeldingen zijn.

(ii) Zij $\mathbb{F}$ een lichaam met $1 + 1 \neq 0$. Laat zien dat $\dim \operatorname{Im} f = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(iii) Zij $\mathbb{F}$ een lichaam met $1 + 1 \neq 0$. Laat zien dat $\dim \operatorname{Im} g = \frac{1}{2}(n-1)n$.

(iv) Hoe veranderen de antwoorden in (ii) en (iii) voor het geval dat wel $1+1 = 0$ in $\mathbb{F}$.

(Hint voor (ii), (iii) en (iv): Pas f en g op de elementen van de standaardbasis van $\mathbb{F}^{n\times n}$ toe.)

Opmerking: De deelruimte $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{F}^{n\times n}$ heet de deelruimte van *symmetrische matrices*, de deelruimte $\operatorname{Im} g \subset \mathbb{F}^{n\times n}$ heet de deelruimte van *antisymmetrische matrices*. Omdat $A = \frac{1}{2}f(A) + \frac{1}{2}g(A)$ (als $1 + 1 \neq 0$ in $\mathbb{F}$) laat zich iedere $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ (op een eenduidige manier) opsplitsen in de som van een symmetrische en een antisymmetrische matrix.

Oefenopgaven week 3

Opgave XI
Zij $f : V \to W$ een lineaire afbeelding tussen de vectorruimten V en W en zij $U \subset \operatorname{Ker} f$ een lineaire deelruimte van $\operatorname{Ker} f$.
Laat zien dat de afbeelding $\overline{f} : V/U \to W, v + U \mapsto f(v)$ welgedefinieerd is (d.w.z. onafhankelijk van de keuze van de representant van $v + U$).

(i) Laat zien dat $\operatorname{Im} \overline{f} = \operatorname{Im} f$ en bewijs dat $\dim \operatorname{Ker} \overline{f} = \dim \operatorname{Ker} f - \dim U$.

(ii) Wat is de kern van $\overline{f}$?

Opgave XII
Laten U, W eindig-dimensionale deelruimten van een vectorruimte V zijn. Geef een bewijs van de dimensiestelling $\dim(U+W)+\dim(U\cap W) = \dim U+\dim W$ met behulp van de homomorfiestelling.
(Hint: Laat zien dat de verzameling $U \times W := \{(u, w) \mid u \in U, w \in W\}$ met componentsgewijs optellen en scalair vermenigvuldigen een vectorruimte is en bekijk de afbeelding $f : U \times W \to U + W, (u, w) \mapsto u + w$.)

Opgave XIII
Bepaal de matrices van de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2y + z, -x + 4y + 5z, x + z)$;

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x + 2y, x + 2y)$;

(iii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1)$;

(iv) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, x_1, \ldots, x_1)$.

Opgave XIV
Bepaal voor de aangegeven matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de kern van de bijhorende lineaire afbeelding $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$;

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Opgave XV
Zij $D_{ben} := \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid A_{ij} = 0 \text{ voor } i < j\}$ de verzameling van *benedendriehoeksmatrices* en $D_{bov} := \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid A_{ij} = 0 \text{ voor } i > j\}$ de verzameling van *bovendriehoeksmatrices*.

(i) Laat zien dat D_{ben} en D_{bov} lineaire deelruimten van $\mathbb{F}^{n\times n}$ zijn.

(ii) Bepaal de dimensies van D_{ben}, D_{bov} en $D_{ben} \cap D_{bov}$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_08/la2.html