Huiswerk week 4

Opgave 13.
Laten $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ en $B' = ((2,1,-1),(1,0,3),(-1,2,1))$ twee bases zijn van $\mathbb{R}^3$ en $C = ((1,0),(0,1))$ en $C' = ((1,1),(1,-1))$ twee bases van $\mathbb{R}^2$.
De lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is met betrekking tot de standaardbases B en C gegeven door de matrix $A = {}_C f_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Bepaal $\operatorname{Ker} f$ en $\operatorname{Im} f$.

(ii) Bepaal de coördinaatvector $\Phi_{C'}^{-1}$ van $f((4,1,3))$ met betrekking tot de basis C'.

(iii) Bepaal de matrix $A' = {}_{C'} f_{B'}$ van f met betrekking tot de bases B' en C'.

Opgave 14.
Zij $v_1 = (1,-1,0)$ en $v_2 = (0,1,-1)$ in $\mathbb{R}^3$ en zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door $f((x,y,z)) = (z,x,y)$.

(i) Zij $U := L(v_1, v_2)$. Laat zien dat $f(U) \subset U$ en ga na dat de beperking van f op de deelruimte U een isomorfisme van U is.

(ii) Bepaal de matrix van de beperking van f op U met betrekking tot de basis $B = (v_1, v_2)$ van U.

Opgave 15.
Zij $V = Pol_3 := \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de vectorruimte der polynomen van graad hoogstens 3 en zij $B = (1, x, x^2, x^3)$ de standaardbasis van V. Verder zijn de twee lineaire afbeeldingen $\varphi : V \to V, p(x) \mapsto x\, p'(x)$ en $\psi : V \to V, p(x) \mapsto p(x+1)$ gegeven.

(i) Bepaal de matrices $P := {}_B\varphi_B$ en $Q := {}_B\psi_B$ van de lineaire afbeeldingen φ en ψ.

(ii) Bepaal voor de basiselementen $v \in B$ de beelden $\varphi \circ \psi(v)$ en $\psi \circ \varphi(v)$ door de lineaire afbeeldingen direct toe te passen.

Ga na dat je resultaten overeenkomen met de matrix producten PQ en QP.

Opgave 16.
Zij Id de identieke afbeelding $v \mapsto v$ op de vectorruimte V. Laten $B = (v_1, \ldots, v_n)$ en $C = (w_1, \ldots, w_n)$ twee bases van V zijn.

(i) Zij $P := {}_C Id_B$ de matrix van Id met betrekking tot de bases B en C en zij $Q := {}_B Id_C$ de matrix van Id waarbij de rollen van de bases verruild zijn.

Laat zien dat P en Q inverteerbaar zijn en dat $Q = P^{-1}$.

(ii) Zij $f : V \to V$ de lineaire afbeelding gegeven door $f(v_i) = w_i$. Laat zien dat ${}_B f_B = {}_B Id_C = Q$ is.

Opmerking: De matrix Q kan dus op twee verschillende manieren geïnterpreteerd worden: (1) Als matrix van de identieke afbeelding met betrekking tot twee verschillende bases C en B. (2) Als matrix van de lineaire afbeelding die de basis B op de basis C afbeeld, waarbij deze matrix (aan beide kanten) met betrekking tot de basis B geschreven wordt.

Oefenopgaven week 4

Opgave XVI
Bij een vaak gebruikte projectie $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wordt de standaardbasis als volgt afgebeeld:

$$\pi((1,0,0)) = (1,0), \quad \pi((0,1,0)) = (0.5, 0.3), \quad \pi((0,0,1)) = (0,1).$$

(i) Geef de matrix A van π met betrekking tot de standaardbases van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ aan.

(ii) Bepaal het beeld van een kubus met hoekpunten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ bij deze projectie.

Bereken de beelden van de hoekpunten en maak een plaatje van de projectie van de kubus.

(iii) Bereken de kern van de projectie π. Geef een (meetkundige) interpretatie van de kern.

Opgave XVII
Zij $f : V \to V$ een lineaire afbeelding met $f \circ f = f$.

(i) Bewijs dat $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ en concludeer dat $V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

(ii) Laat zien dat er een basis B van V bestaat zo dat f met betrekking tot deze basis de matrix $A = {}_B f_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ heeft, d.w.z. $A_{ii} = 1$ voor $1 \leq i \leq r$ met $r \leq \dim V$ en $A_{ij} = 0$ elders.

Opgave XVIII
Voor $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zij de afbeelding $C_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ gedefinieerd door

$$C_A(X) := AX - XA.$$

(i) Laat zien dat C_A een lineaire afbeelding is.

(ii) Zij $n = 3$ en $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Bepaal $\operatorname{Ker} C_A$ en $\operatorname{Im} C_A$.

(iii) Zij A zo als in deel (ii). Laat zien dat $\operatorname{Ker} C_A + \operatorname{Im} C_A = \mathbb{R}^{3\times 3}$.
Schrijf $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ in de vorm $X = X_1 + X_2$ met $X_1 \in \operatorname{Ker} C_A$, $X_2 \in \operatorname{Im} C_A$.

Opgave XIX
Een *diagonaalmatrix* is een matrix $D \in \mathbb{F}^{n\times n}$ met $D_{ij} = 0$ voor $i \neq j$, d.w.z. met elementen $\neq 0$ alleen maar op de diagonaal.

(i) Zij $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ een $n \times n$-matrix en $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$ een diagonaalmatrix.

Wat heeft de vermenigvuldiging van A met D van links voor een effect? Hoe zit het met de vermenigvuldiging met D van rechts?
Beschrijf de matrix producten DA en AD (natuurlijk afhankelijk van A en D).

(ii) Twee matrices A en B *commuteren* (verruilen bij het vermenigvuldigen) als $AB = BA$. Stel dat $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ met *alle* diagonaalmatrices in $\mathbb{F}^{n\times n}$ commuteert. Laat zien dat dat A zelf ook een diagonaalmatrix is.

Opgave XX
Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(i) Bewijs de volgende uitspraak: AB is inverteerbaar $\Longleftrightarrow$ A en B zijn inverteerbaar.

(ii) Zij $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een inverteerbare matrix. Laat zien dat de afbeelding $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, A \mapsto B^{-1}AB$ een isomorfisme is (d.w.z. lineair en bijectief).

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_08/la2.html