Huiswerk week 5

Opgave 17.
Zij $U := L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \subset \mathbb{R}^5$ voor $v_1 = (1, 2, 1, 2, 0)$, $v_2 = (2, 1, 1, 2, 2)$, $v_3 = (-1, 1, 0, 0, -2)$, $v_4 = (3, -1, 2, 0, 6)$, $v_5 = (0, 2, 2, 0, 0)$, $v_6 = (2, 3, 5, 0, 4)$.
Bepaal een basis van U.

Opgave 18.
Voor welke waarden van $\lambda \in \mathbb{R}$ is de matrix

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

inverteerbaar? Bepaal voor deze waarden van λ de inverse matrix A_λ^{-1}.

Opgave 19.
Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en zij A inverteerbaar.

(i) Laat zien dat zich met behulp van elementaire rijtransformaties een matrix $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ laat vinden die voldoet aan $A \cdot X = B$.
(Hint: De elementaire transformaties, die van A de eenheidsmatrix E maken, kunnen ook op B toegepast worden.)

(ii) Bepaal voor $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ een matrix $X \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ met $A \cdot X = B$.

Opgave 20.
Zij V een 2-dimensionale vectorruimte met basis $B = (v_1, v_2)$. Op V zijn de volgende drie lineaire afbeeldingen f, g en h gedefinieerd:

$$f : \begin{array}{l} v_1 \mapsto v_1 - v_2 \\ v_2 \mapsto v_1 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{l} v_1 \mapsto v_2 \\ v_2 \mapsto v_1 \end{array}, \qquad h : \begin{array}{l} v_1 \mapsto 2v_1 \\ v_2 \mapsto -2v_2 \end{array}.$$

(i) Bepaal de matrices ${}_Bf_B$, ${}_Bg_B$ en ${}_Bh_B$ van f, g en h met betrekking tot de basis B.

(ii) Zij $B' = (w_1, w_2)$ een verdere basis van V waarbij

$$w_1 = 3v_1 - v_2 \text{ en } w_2 = v_1 + v_2.$$

Bepaal de matrices ${}_{B'}f_{B'}$, ${}_{B'}g_{B'}$ en ${}_{B'}h_{B'}$ van f, g en h met betrekking tot deze basis B'.

Oefenopgaven week 5

Opgave XXI
Bepaal voor de volgende deelruimten een basis:

(i) $L((1,3,-1),(2,0,1),(1,-1,1)) \subset \mathbb{R}^3$;

(ii) $L((1,1,-1),(2,1,0),(-1,1,2)) \subset \mathbb{R}^3$;

(iii) $L((1,-2,3,1),(3,2,1,-2),(1,6,-5,-4)) \subset \mathbb{R}^4$;

(iv) $L((0,1,-1,2),(1,2,-1,-1),(-1,1,1,-1)) \subset \mathbb{R}^4$.

Opgave XXII
Ga na of de volgende matrices inverteerbaar zijn en geef de inverse aan als deze bestaat.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(v) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

Opgave XXIII
Voor een $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ heet de som $tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ der diagonaalelementen van A het *spoor* van A (Engels: *trace*).

(i) Ga na dat $tr(AB) = tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$.

(ii) Zij $T \in \mathbb{F}^{n\times n}$ een inverteerbare matrix. Laat zien dat $tr(T^{-1}AT) = tr(A)$. Hieruit volgt dat het spoor van een lineaire afbeelding niet verandert onder een basistransformatie.

Opgave XXIV
Bepaal de matrices ${}_Bf_B$ en ${}_Cf_C$ van alle lineaire afbeeldingen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ met $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f = L((1,1))$ voor

(i) de standaardbasis $B = ((1,0),(0,1))$;

(ii) de basis $C = ((1,2),(1,1))$.

Opgave XXV
Zij $V = Pol_2 := \{p(x) = ax^2 + bx + c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ de vectorruimte der polynomen van graad hoogstens 2. Bepaal voor $\varphi : V \to V, p(x) \mapsto x\ p'(x)$ en $\psi : V \to V, p(x) \mapsto p(x+1)$ de matrices van φ en ψ met betrekking tot de basis $B = (1, x+1, (x+1)^2)$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_08/la2.html