Huiswerk week 6

Opgave 21.
Zij $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$.

(i) Laat zien dat $\det A$ noodzakelijk van de vorm $\det A = ad - bc$ is (door A op bovendriehoeksvorm te transformeren).

(ii) Ga na dat de functie $\det A = ad - bc$ inderdaad aan de eisen voor de determinant voldoet.

Opgave 22.
Bepaal de determinanten van

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

waarbij $t \in \mathbb{R}$ een willekeurig getal is.

Opgave 23.
Laten $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times m}$ en $C \in \mathbb{F}^{n\times m}$ en zij

$$M := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Toon aan dat $\det M = \det A \cdot \det B$.

Opgave 24.
We weten dat de elementaire rijtransformaties gerealiseerd kunnen worden door vermenigvuldiging van links met zekere inverteerbare matrices, verkregen door dezelfde transformatie op de eenheidsmatrix toe te passen:

$R1$**:** verruilen van de i-de en j-de rij door de matrix P_{ij};

$R2$**:** vermenigvuldigen van de i-de rij met $\lambda \neq 0$: $M_i(\lambda)$;

$R3$**:** optellen van de μ keer de i-de rij bij de j-de rij ($i \neq j$): $O_{ij}(\mu)$.

Iedere van de matrices P_{ij}, $M_i(\lambda)$, $O_{ij}(\mu)$ heet een *elementaire matrix*.

(i) Laat zien dat $\det P_{ij} = -1$, $\det M_i(\lambda) = \lambda$ en $\det O_{ij}(\mu) = 1$.

(ii) Zij $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ en zij X een elementaire matrix. Laat zien dat $\det(XB) = \det X \cdot \det B$.

(iii) Geef voor het geval van een inverteerbare matrix A een alternatief bewijs van de stelling $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ door gebruik ervan te maken dat A een product van elementaire matrices is en deel (ii) toe te passen.

Oefenopgaven week 6

Opgave XXVI
Bepaal de determinanten van de volgende matrices:

(i) in $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) in $\mathbb{C}^{3\times 3}$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ -2i & 1 & 4-i \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2+i & 3 \\ 1-i & i & 1 \\ 3i & 2 & -1+i \end{pmatrix}$$

(iii) in $\mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -12 \\ -5 & 12 & -14 & 19 \\ -9 & 22 & -20 & 31 \\ -4 & 9 & -14 & 15 \end{pmatrix}$$

Opgave XXVII

(i) Voor welke factor λ geldt de vergelijking:

$$\det \begin{pmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}?$$

(ii) Voor welke factor λ geldt de vergelijking:

$$\det \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 3b_1 + 5c_1 & 3b_2 + 5c_2 & 3b_3 + 5c_3 \\ 7c_1 & 7c_2 & 7c_3 \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}?$$

(iii) Voor welke factor λ geldt de vergelijking:

$$\det\begin{pmatrix} b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}?$$

Opgave XXVIII

(i) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is $\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *niet* inverteerbaar?

(ii) Voor welke combinatie van getallen $a, b \in \mathbb{R}$ is $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ wel inverteerbaar?

Opgave XXIX

(i) Zij $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ en $\lambda \in \mathbb{F}$. Laat zien dat $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(ii) Zij $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ met rijen $A_{1-}, A_{2-}, \ldots, A_{n-}$. Zij $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ de matrix met de rijen van A in omgekeerde volgorde, d.w.z. $B_{1-} = A_{n-}, B_{2-} = A_{(n-1)-}, \ldots, B_{n-} = A_{1-}$.

Geef $\det B$ afhankelijk van $\det A$ aan.

(iii) Bepaal $\det A$ voor $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ gegeven door $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i+j = n+1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$,

d.w.z. voor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & \cdots & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave XXX

Zij $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ van de vorm

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Laat zien dat $\det A = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_08/la2.html