# Tentamen Lineaire Algebra 2

*Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!*
*Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan,*

**Opgave 1.** (10 punten)
Zij $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$(x, y, z, w) \mapsto (x - z, y + w, 2x + y).$$

(i) Bepaal een basis van $\operatorname{Ker} f$ en een basis van $\operatorname{Im} f$.

(ii) Geef een deelruimte $U \subset \mathbb{R}^4$ aan zo dat $f(U) = \operatorname{Im} f$ en zo dat de beperking van $f$ op $U$ een isomorfisme van $U$ naar $\operatorname{Im} f$ is.
(Het is voldoende een basis van $U$ aan te geven, maar je moet laten zien dat $U$ inderdaad de gevraagde eigenschappen heeft.)

**Opgave 2.** (8 punten)
Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding.

(i) Laat zien dat $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) \leq \frac{1}{2}n$.

(ii) Geef voor $n = 5$ een expliciet voorbeeld van een lineaire afbeelding $f$ met $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 2$.

**Opgave 3.** (9 punten)
Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

inverteerbaar? Bereken voor deze waarden van $a$ de inverse matrix $A^{-1}$.

**z.o.z.**

**Opgave 4.** (6 punten)
Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ten opzichte van een zekere basis $(v_1, v_2, v_3)$ van $\mathbb{R}^3$).
Bewijs dat er een deelruimte $U \subset \mathbb{R}^3$ bestaat met $\dim U = 2$ en $f(U) \subset U$.

**Opgave 5.** (7 punten)
Laten $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inverteerbare matrices zijn.

(i) Bewijs dat $\det(A^{-1}B^{-1}AB) = 1$.

(ii) Geldt ook dat $\det(AB - BA) = 0$? Geef een bewijs of een (expliciet) tegenvoorbeeld.

**Opgave 6.** (10 punten)
We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat een parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ bevat:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ -2x \phantom{+ y} + 2z &= 2 \\ x + \lambda y + z &= 0. \end{aligned}$$

(i) Bepaal de waarden van de parameter $\lambda$ waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft.

(ii) Geef alle waarden van $\lambda$ aan waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.
(Licht je antwoord toe!)

(iii) Geef alle waarden van $\lambda$ aan waarvoor het stelsel niet oplosbaar is.
(Licht je antwoord toe!)

**Succes ermee!**