Huiswerk week 1

Opgave 1.
Bewijs of weerleg (door een tegenvoorbeeld) dat de volgende afbeeldingen lineair zijn:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (2x - y, x)$;

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x + 1, 2y, x + y)$;

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x^2, 2y, x + y)$;

(iv) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (z, x + y)$;

(v) $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : g(x) \mapsto g(x + 1)$;

(vi) $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : g(x) \mapsto g(x) + 1$;

(vii) $\varphi : V \to \mathbb{R} : g(x) \mapsto \int_0^1 g(x)\,dx$ voor $V := \{g : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid g \text{ continu}\}$.

Opgave 2.
Geef, indien deze bestaat, een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ aan met

$$f(1, 1, 1) = (3, 5, 2), \quad f(2, -1, -1) = (-6, 7, 7), \quad f(0, 1, 1) = (4, 1, -1)$$

zo dat

(i) f een isomorfisme is;

(ii) f geen isomorfisme is.

Hint: Het is natuurlijk voldoende de beelden van f op een basis van $\mathbb{R}^3$ aan te geven.

Opgave 3.
Zij $V := \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in \mathbb{R} \text{ voor alle } i \geq 0\}$ de $\mathbb{R}$-vectorruimte van oneindige rijen (met componentsgewijs optellen en scalair vermenigvuldigen). We definiëren twee afbeeldingen op V als volgt:

$\lambda : V \to V : (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ (λ heet *links-shift*)
$\rho : V \to V : (a_0, a_1, a_2, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)$ (ρ heet *rechts-shift*)

(i) Laat zien dat λ en ρ lineaire afbeeldingen zijn.

(ii) Laat zien dat de samengestelde afbeelding $\lambda \circ \rho$ de identieke afbeelding op V is, dus i.h.b. een isomorfisme.

(iii) Laat zien dat de samengestelde afbeelding $\rho \circ \lambda$ niet surjectief is, en dus geen isomorfisme.

(iv) Zij $U := \rho \circ \lambda(V)$. Geef U expliciet aan en ga na dat $\rho \circ \lambda$ de identieke afbeelding op U is.

Oefenopgaven week 1

Opgave I
Laten $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ afbeeldingen zijn en zij $g \circ f : X \to Z$ de samengestelde afbeelding van f en g. Laat zien dat de volgende implicaties gelden:

(i) Als $g \circ f$ injectief is, dan is ook f injectief.

(ii) Als $g \circ f$ surjectief is, dan is ook g surjectief.

Opgave II
Zij $f : V \to W$ een isomorfisme van de $\mathbb{F}$-vectorruimten V en W. Laat zien dat de volgende *structurele eigenschappen* van V door f naar W overgebracht worden:

(i) Als $(v_1, \ldots, v_r)$ een onafhankelijk stelsel in V is, dan is $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ een onafhankelijk stelsel in W.

(ii) Als $(v_1, \ldots, v_m)$ een volledig stelsel in V is, dan is $(f(v_1), \ldots, f(v_m))$ een volledig stelsel in W.

(iii) Als $U \subset V$ een lineaire deelruimte van dimensie k is, dan is $f(U)$ een lineaire deelruimte van dimensie k in W.

Opgave III
Geef aan waarom de volgende afbeeldingen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ niet lineair zijn.

(i) $f : (x, y) \mapsto (1, y)$;

(ii) $f : (x, y) \mapsto (x, x^2)$;

(iii) $f : (x, y) \mapsto (\sin x, x)$;

(iv) $f : (x, y) \mapsto (|x|, y)$;

(v) $f : (x, y) \mapsto (x + 1, y)$;

Opgave IV
Ga na of de volgende lineaire afbeeldingen injectief, surjectief of bijectief zijn.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (x - y, 2z)$;

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (x - y, 0, 2x - y)$;

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x - y, z, 2x - y)$;

Opgave V

(i) Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de (eenduidige) lineaire afbeelding met $f((1,0)) = (1,4)$ en $f((1,1)) = (2,5)$. Is f injectief, surjectief of bijectief? Wat is $f((2,3))$?

(ii) Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de (eenduidige) lineaire afbeelding met $f((1,1)) = (1,0,2)$ en $f((2,3)) = (1,-1,4)$. Is f injectief, surjectief of bijectief? Wat is $f((8,11))$?

(iii) Is er een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ met $f((1,0,3)) = (1,1)$ en $f((-2,0,-6)) = (2,1)$?

Opgave VI

Zij $f : V \to W$ een lineaire afbeelding van de $\mathbb{F}$-vectorruimten V en W. Zij $v_1, \ldots, v_k \in V$ en $w_1, \ldots, w_k \in W$ zo dat $f(v_i) = w_i$ voor $i = 1, \ldots, k$.
Stel dat $(w_1, \ldots, w_k)$ een lineair onafhankelijk stelsel in $f(V)$ is. Laat zien dat dan ook $(v_1, \ldots, v_k)$ lineair onafhankelijk is.

Opgave VII

Zij $V := \{f(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de vectorruimte van polynoomfuncties over $\mathbb{R}$.
Zij $\delta : V \to V, f(x) \mapsto f'(x)$ de lineaire afbeelding die een functie op zijn afgeleide afbeeldt en $\mu : V \to V, f(x) \mapsto x \cdot f(x)$ de vermenigvuldiging met x.

(i) Laat zien dat δ en μ lineair zijn.

(ii) Zijn δ en μ injectief, surjectief of bijectief?

(iii) Geef de samenstellingen $\delta \circ \mu$ en $\mu \circ \delta$ expliciet aan. Is $\delta \circ \mu = \mu \circ \delta$?

(iv) Zijn $\delta \circ \mu$ en $\mu \circ \delta$ injectief, surjectief of bijectief?

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_09/la2.html