

Huiswerk week 2

Opgave 4.

Zij $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z, w) \mapsto (x + y, y - z)$.

- (i) Bepaal een basis van $\text{Ker } f$ en een basis van $\text{Im } f$.
- (ii) Zijn er lineaire afbeeldingen $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die dezelfde kern en hetzelfde beeld als f hebben en niet van de vorm $g = cf$ voor $c \in \mathbb{R}$ zijn (d.w.z. niet van de vorm $(x, y, z, w) \mapsto (c(x + y), c(y - z))$). Zo ja, geef een voorbeeld, zo nee, bewijs dat zo'n g niet bestaat.

Opgave 5.

We hebben bewezen dat voor een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$ van een eindig-dimensionale vectorruimte V geldt dat $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim V$.

- (i) Bepaal *alle* lineaire afbeeldingen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ met $\text{Ker } f = \text{Im } f = L(e_1)$ (waarbij natuurlijk $e_1 = (1, 0)$).
- (ii) Geef voorbeelden van lineaire afbeeldingen $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ met $\dim \text{Ker } f = 2$ (en dus ook $\dim \text{Im } f = 2$) en
 - (a) $\dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f = 0$;
 - (b) $\dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f = 1$;
 - (c) $\dim \text{Ker } f \cap \text{Im } f = 2$.

Opgave 6.

Zij V een eindig-dimensionale vectorruimte en $f : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding. We noteren met f^k de k -voudige samenstelling van f met zich zelf, d.w.z. $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ enz. Verder is $\text{rk } f^k = \dim \text{Im } f^k$.

- (i) Laat zien dat $\text{rk } f^{k+1} \leq \text{rk } f^k$ voor $k \geq 1$.
- (ii) Stel dat $\text{rk } f = \text{rk } f^2$. Laat zien dat $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ en concludeer dat $V = \text{Ker } f + \text{Im } f$.
- (iii) Bewijs dat er voor een willekeurige $f : V \rightarrow V$ een natuurlijk getal k bestaat met $V = \text{Ker } f^k + \text{Im } f^k$.
(Hint: Laat zien dat er een k bestaat met $\text{rk } f^k = \text{rk } f^{2k}$ en pas deel (ii) op f^k toe.)

Oefenopgaven week 2

Opgave VIII

Zij $V = Pol_3 := \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de vectorruimte der polynomen van graad hoogstens 3. (Dat dit inderdaad een vectorruimte is, hoef je niet aan te tonen.)

- (i) Bepaal de oplossingen van de differentiaalvergelijking $x p'(x) - p(x+1) = 0$ in V .
(Hint: Laat zien dat $p(x) \mapsto x p'(x) - p(x+1)$ een lineaire afbeelding is en bepaal de kern hiervan.)
- (ii) Laat zien dat de differentiaalvergelijking $p''(x) + p(x) = q(x)$ voor iedere $q(x) \in V$ een eenduidige oplossing in V heeft.
(Hint: Het is niet nodig, de oplossing expliciet te bepalen.)

Opgave IX

Zij V een vectorruimte met basis (v_1, \dots, v_n) en zij $f : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding. Toon aan dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

- (i) $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ is een basis van $\text{Im } f$.
- (ii) f is een isomorfisme tussen V en $\text{Im } f$.

Opgave X

Zij $V := \{(x, x+y, 0, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$. Laat zien dat $\dim V = 3$ en geef een isomorfisme $f : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ expliciet aan.

Opgave XI

Laten U, V, W vectorruimten en $f : U \rightarrow V$ en $g : V \rightarrow W$ lineaire afbeeldingen.

- (i) Stel dat $g \circ f$ injectief is. Bewijs dat dan f injectief is. Moet g ook injectief zijn?
- (ii) Stel dat $g \circ f$ surjectief is. Bewijs dat dan g surjectief is. Moet f ook surjectief zijn?

Opgave XII

Zij V een vectorruimte en $f : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding. Laat zien dat $f \circ f = 0$ (nulafbeelding) $\iff \text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

Opgave XIII

Voor een lineaire afbeelding $f : V \rightarrow V$ van een eindig-dimensionale vectorruimte V hebben we gezien dat f bijectief $\iff f$ injectief $\iff f$ surjectief. Voor oneindig-dimensionale vectorruimten geldt dit niet!

Zij $V = Pol := \{f(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de vectorruimte van polynoomfuncties over \mathbb{R} .

Zij $\delta : V \rightarrow V, f(x) \mapsto f'(x)$ de lineaire afbeelding die een functie op zijn afgeleide afbeeldt en $\iota : V \rightarrow V, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mapsto \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x$ de afbeelding die een functie op zijn primitieve met constante term 0 afbeeldt.

- (i) Laat zien dat ι een lineaire afbeelding is.
- (ii) Laat zien dat δ surjectief maar niet injectief is (en dus ook niet bijectief). Bepaal de kern van δ .
- (iii) Laat zien dat ι injectief maar niet surjectief is (en dus ook niet bijectief). Bepaal het beeld van ι .
- (iv) Ga na dat $\delta \circ \iota = Id_V$, d.w.z. $\delta \circ \iota(f) = f$ voor alle $f \in V$. Ga ook na dat $\iota \circ \delta$ noch injectief noch surjectief is.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_09/la2.html