Huiswerk week 3

Opgave 7.
Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte, $U \subset V$ een lineaire deelruimte en V/U de quotiëntenruimte van U in V. De afbeelding $\pi : V \to V/U, v \mapsto v + U$ heet de *natuurlijke **p**rojectie* van V naar V/U (vandaar de naam π).

(i) Laat zien dat π een surjectieve lineaire afbeelding is met $\operatorname{Ker} \pi = U$.

(ii) Stel dat V eindig-dimensionaal is. Bewijs dat $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

Opgave 8.
Zij V een eindig-dimensionale $\mathbb{F}$-vectorruimte, $U \subset V$ een lineaire deelruimte en V/U de quotiëntenruimte van U in V.

(i) Zij $(v_1, \ldots, v_r)$ een basis van U die door de vectoren $v_{r+1}, \ldots, v_n$ tot een basis $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ van V uitgebreid wordt.

Laat zien dat $(v_{r+1} + U, \ldots, v_n + U)$ een basis van V/U is.

(Hieruit volgt natuurlijk rechtstreeks dat $\dim U + \dim V/U = \dim V$.)

(ii) Zij $v_1, \ldots, v_k \in V$. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

(a) $(v_1 + U, \ldots, v_k + U)$ is een lineair onafhankelijk stelsel in V/U;

(b) $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \in U$ alleen maar voor $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

(iii) Zij $(v_1, \ldots, v_k)$ een lineair onafhankelijk stelsel in V met $v_i \notin U$. Laat zien dat $(v_1 + U, \ldots, v_k + U)$ niet noodzakelijk lineair onafhankelijk is.

Geef een expliciet voorbeeld met $V = \mathbb{R}^3$, $\dim U = 1$ en $v_1, v_2 \notin U$ zo dat (v_1, v_2) lineair onafhankelijk maar $(v_1 + U, v_2 + U)$ lineair afhankelijk is.

Opgave 9.
Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de lineaire afbeelding gegeven door $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + \ldots + x_n$.

(i) Bepaal een basis van $\operatorname{Ker} f$, een basis van $\operatorname{Im} f$, een basis van $\mathbb{R}^n/\operatorname{Ker} f$ en geef een isomorfisme van $\mathbb{R}^n/\operatorname{Ker} f$ naar $\operatorname{Im} f$ aan.

(ii) Bedenk een lineaire afbeelding $g : \mathbb{R}^n \to \operatorname{Ker} f$ zo dat $\operatorname{Ker} g$ isomorf met $\operatorname{Im} f$ is.

Oefenopgaven week 3

Opgave XIV
Zij $f : V \to W$ een lineaire afbeelding tussen de vectorruimten V en W en zij $U \subset \operatorname{Ker} f$ een lineaire deelruimte van $\operatorname{Ker} f$.
Laat zien dat de afbeelding $\overline{f} : V/U \to W, v + U \mapsto f(v)$ welgevormd is (d.w.z. onafhankelijk van de keuze van de representant van $v + U$).

(i) Laat zien dat $\operatorname{Im} \overline{f} = \operatorname{Im} f$ en bewijs dat $\dim \operatorname{Ker} \overline{f} = \dim \operatorname{Ker} f - \dim U$.

(ii) Wat is de kern van $\overline{f}$?

Opgave XV
Zij V een $\mathbb{F}$-vectorruimte met lineaire deelruimten $U, W \subset V$ zo dat $V = U + W$ en $U \cap W = \{0\}$. Stel dat $(u_1, \ldots, u_m)$ een basis van U is.
Laat zien dat dan $(u_1 + W, \ldots, u_m + W)$ een basis van V/W is.

Opgave XVI

(i) Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding gegeven door $(x, y, z) \mapsto (x + \frac{1}{3}y, z + \frac{1}{3})$ (dit geeft een gebruikelijke projectie van een kubus in het vlak).
Bepaal alle vectoren $v \in \mathbb{R}^3$ die op $w = (2, 1)$ worden afgebeeld.

(ii) Zij $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeven door $f((x, y, z)) := x - y + z$.
Bepaal alle vectoren $v \in \mathbb{R}^3$ met $f(v) = 3$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_09/la2.html