Lineaire algebra 2 **najaar 2009**

Huiswerk week 4

Opgave 10.
Bepaal de matrices van de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ met betrekking tot de betreffende standaardbases:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x, y) \mapsto (2x - y, 3x + 4y, x)$;

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto (2x + 3y - z, x + z)$;

(iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto 2x + y - 3z$;

(iv) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 + x_n$;

(v) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1)$.

Opgave 11.
Laten $B = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ en $B' = ((2, 1, -1), (1, 0, 3), (-1, 2, 1))$ twee bases zijn van $\mathbb{R}^3$ en $C = ((1, 0), (0, 1))$ en $C' = ((1, 1), (1, -1))$ twee bases van $\mathbb{R}^2$.
De lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ is met betrekking tot de standaardbases B en C gegeven door de matrix $A = {}_C f_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Bepaal $\operatorname{Ker} f$ en $\operatorname{Im} f$.

(ii) Bepaal de coördinaatvector $\Phi_{C'}^{-1}$ van $f((4, 1, 3))$ met betrekking tot de basis C'.

(iii) Bepaal de matrix $A' = {}_{C'} f_{B'}$ van f met betrekking tot de bases B' en C'.

Opgave 12.
Zij $v_1 = (1, -1, 0)$ en $v_2 = (0, 1, -1)$ in $\mathbb{R}^3$ en zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door $f((x, y, z)) = (z, x, y)$.

(i) Zij $U := L(v_1, v_2)$. Laat zien dat $f(U) \subset U$ en ga na dat de beperking van f op de deelruimte U een isomorfisme van U is.

(ii) Bepaal de matrix ${}_B f_B$ van de beperking van f op U met betrekking tot de basis $B = (v_1, v_2)$ van U.

Oefenopgaven week 4

Opgave XVII
Laat zien dat $\mathbb{F}^{m\times n}$ met de bewerkingen

$$(A+B)_{ij} := A_{ij} + B_{ij} \text{ voor } 1 \le i \le m, 1 \le j \le n,\ A, B \in \mathbb{F}^{m\times n};$$
$$(\lambda A)_{ij} := \lambda A_{ij} \text{ voor } 1 \le i \le m, 1 \le j \le n,\ A \in \mathbb{F}^{m\times n}, \lambda \in \mathbb{F},$$

d.w.z. met componentsgewijs optellen en scalair vermenigvuldigen een $\mathbb{F}$-vectorruimte is.

Opgave XVIII
Zij $D_{ben} := \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid A_{ij} = 0 \text{ voor } i < j\}$ de verzameling van *benedendriehoeksmatrices* en $D_{bov} := \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid A_{ij} = 0 \text{ voor } i > j\}$ de verzameling van *bovendriehoeksmatrices*.

(i) Laat zien dat D_{ben} en D_{bov} lineaire deelruimten van $\mathbb{F}^{n\times n}$ zijn.

(ii) Bepaal de dimensies van D_{ben}, D_{bov} en $D_{ben} \cap D_{bov}$.

Opgave XIX
Bij een zekere projectie $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wordt de standaardbasis als volgt afgebeeld:

$$\pi((1,0,0)) = (1,0), \quad \pi((0,1,0)) = (0.5, 0.3), \quad \pi((0,0,1)) = (0,1).$$

(i) Geef de matrix A van π met betrekking tot de standaardbases van $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ aan.

(ii) Bepaal het beeld van een kubus met hoekpunten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ bij deze projectie.

Bereken de beelden van de hoekpunten en maak een plaatje van de projectie van de kubus.

(iii) Bereken de kern van de projectie π. Geef een (meetkundige) interpretatie van de kern.

Opgave XX
We definiëren de volgende matrices:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3},$$
$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \quad D := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(i) Bereken de matrix producten $A \cdot B$, $B \cdot C$, $B \cdot D$, $C \cdot A$, $C \cdot B$, $D \cdot C$, $A^2 (:= A \cdot A)$ en D^2.

(ii) Druk A^n met behulp van de Fibonacci getallen uit.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_09/la2.html