Huiswerk week 5

Opgave 13.
Zij V een vectorruimte met basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ en zij $f : V \to V$ een lineaire afbeelding met matrix $A := {}_B f_B$. Zij $C = (w_1, \dots, w_n)$ een verdere ('nieuwe') basis van V en zij $T := {}_B Id_C$ de matrix die als kolommen de coördinaatvectoren $\Phi_B^{-1}(w_j)$ bevat, d.w.z. de coördinaatvectoren van de nieuwe basis met betrekking tot de 'oude' basis.

(i) Laat zien dat voor de matrix ${}_C f_C$ van f met betrekking tot de 'nieuwe' basis geldt: ${}_C f_C = T^{-1} A T$.

(ii) Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de spiegeling in de lijn $y = 2x$. Zij $v_1 = (1, 2)$ een vector op de spiegelingsas en $v_2 = (2, -1)$ een vector loodrecht op de spiegelingsas.

   (a) Bepaal de matrix ${}_B f_B$ van f m.b.t. de *symmetrieaangepaste* basis $B = (v_1, v_2)$.

   (b) Bepaal de matrix van f met betrekking tot de standaardbasis (e_1, e_2) van $\mathbb{R}^2$.

Merk op: Het omschrijven van een lineaire afbeelding op een nieuwe basis noemt men een *basistransformatie*.

Opgave 14.
Zij $U := L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6) \subset \mathbb{R}^5$ voor $v_1 = (1, 2, 1, 2, 0)$, $v_2 = (2, 1, 1, 2, 2)$, $v_3 = (-1, 1, 0, 0, -2)$, $v_4 = (3, -1, 2, 0, 6)$, $v_5 = (0, 2, 2, 0, 0)$, $v_6 = (2, 3, 5, 0, 4)$. Bepaal een basis van U.

Opgave 15.
Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en zij A inverteerbaar.

(i) Laat zien dat zich met behulp van elementaire rijtransformaties een matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ laat vinden die voldoet aan $A \cdot X = B$.
(Hint: De elementaire transformaties, die van A de eenheidsmatrix E maken, kunnen ook op B toegepast worden.)

(ii) Bepaal voor $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ een matrix $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ met $A \cdot X = B$.

Oefenopgaven week 5

Opgave XXI
Zij $f : V \to V$ een lineaire afbeelding met $f \circ f = f$.

(i) Bewijs dat $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ en concludeer dat $V = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

(ii) Laat zien dat er een basis B van V bestaat zo dat f met betrekking tot deze basis de matrix $A = {}_B f_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ heeft, d.w.z. $A_{ii} = 1$ voor $1 \le i \le r$ met $r \le \dim V$ en $A_{ij} = 0$ elders.

Opgave XXII
Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(i) Bewijs de volgende uitspraak: AB is inverteerbaar $\iff$ A en B zijn inverteerbaar.

(ii) Zij $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een inverteerbare matrix. Laat zien dat de afbeelding $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, A \mapsto B^{-1}AB$ een isomorfisme is (d.w.z. lineair en bijectief).

Opgave XXIII
Zij Id de identieke afbeelding $v \mapsto v$ op de vectorruimte V. Laten $B = (v_1, \ldots, v_n)$ en $C = (w_1, \ldots, w_n)$ twee bases van V zijn.

(i) Zij $P := {}_C Id_B$ de matrix van Id met betrekking tot de bases B en C en zij $Q := {}_B Id_C$ de matrix van Id waarbij de rollen van de bases verruild zijn.

Laat zien dat P en Q inverteerbaar zijn en dat $Q = P^{-1}$.

(ii) Zij $f : V \to V$ de lineaire afbeelding gegeven door $f(v_i) = w_i$. Laat zien dat ${}_B f_B = {}_B Id_C = Q$ is.

Opmerking: De matrix Q kan dus op twee verschillende manieren geïnterpreteerd worden: (1) Als matrix van de identieke afbeelding met betrekking tot twee verschillende bases C en B. (2) Als matrix van de lineaire afbeelding die de basis B op de basis C afbeeld, waarbij deze matrix (aan beide kanten) met betrekking tot de basis B geschreven wordt.

Opgave XXIV
Voor een $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ heet de som $tr(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ der diagonaalelementen van A het *spoor* van A (Engels: *trace*).

(i) Ga na dat $tr(AB) = tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$.

(ii) Zij $T \in \mathbb{F}^{n \times n}$ een inverteerbare matrix. Laat zien dat $tr(T^{-1}AT) = tr(A)$. Hieruit volgt dat het spoor van een lineaire afbeelding niet verandert onder een basistransformatie.

Opgave XXV
Bepaal voor de volgende deelruimten een basis:

(i) $L((1, 3, -1), (2, 0, 1), (1, -1, 1)) \subset \mathbb{R}^3$;

(ii) $L((1, 1, -1), (2, 1, 0), (-1, 1, 2)) \subset \mathbb{R}^3$;

(iii) $L((1, -2, 3, 1), (3, 2, 1, -2), (1, 6, -5, -4)) \subset \mathbb{R}^4$;

(iv) $L((0, 1, -1, 2), (1, 2, -1, -1), (-1, 1, 1, -1)) \subset \mathbb{R}^4$.

Opgave XXVI
Voor welke waarden van $\lambda \in \mathbb{R}$ is de matrix

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

inverteerbaar? Bepaal voor deze waarden van λ de inverse matrix A_λ^{-1}.

Opgave XXVII
Ga na of de volgende matrices inverteerbaar zijn en geef de inverse aan als deze bestaat.

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$;

(ii) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}$;

(iii) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$;

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$;

(v) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_09/la2.html