Huiswerk week 6

Opgave 16.
Zij $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$.

(i) Laat zien: de determinant $\det A$ is noodzakelijk van de vorm

$$\det A = ad - bc.$$

(Hint: Transformeer A op bovendriehoeksvorm.)

(ii) Ga na dat de functie $\det A = ad - bc$ inderdaad aan de eisen voor de determinant voldoet.

Opgave 17.
Bepaal de determinanten van

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

waarbij $t \in \mathbb{R}$ een willekeurig getal is.

Opgave 18.
We weten dat de elementaire rijtransformaties gerealiseerd kunnen worden door vermenigvuldiging van links met zekere inverteerbare matrices, verkregen door dezelfde transformatie op de eenheidsmatrix toe te passen:

$R1$**:** verruilen van de i-de en j-de rij door de matrix P_{ij};

$R2$**:** vermenigvuldigen van de i-de rij met $\lambda \neq 0$: $M_i(\lambda)$;

$R3$**:** optellen van μ keer de i-de rij bij de j-de rij ($i \neq j$): $O_{ij}(\mu)$.

Iedere van de matrices P_{ij}, $M_i(\lambda)$, $O_{ij}(\mu)$ heet een *elementaire matrix*.

(i) Laat zien dat $\det P_{ij} = -1$, $\det M_i(\lambda) = \lambda$ en $\det O_{ij}(\mu) = 1$.

(ii) Zij $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ en zij X een elementaire matrix. Laat zien dat $\det(XB) = \det X \cdot \det B$.

(iii) Geef voor het geval van een inverteerbare matrix A een alternatief bewijs van de stelling

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

door gebruik ervan te maken dat A een product van elementaire matrices is en deel (ii) toe te passen.

Oefenopgaven week 6

Opgave XXVIII
Bepaal de determinanten van de volgende matrices:

(i) in $\mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) in $\mathbb{C}^{3\times 3}$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} i & 2 & -1 \\ 3 & 1+i & 2 \\ -2i & 1 & 4-i \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2+i & 3 \\ 1-i & i & 1 \\ 3i & 2 & -1+i \end{pmatrix}$$

(iii) in $\mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -12 \\ -5 & 12 & -14 & 19 \\ -9 & 22 & -20 & 31 \\ -4 & 9 & -14 & 15 \end{pmatrix}$$

Opgave XXIX

(i) Voor welke factor λ geldt de vergelijking:

$$\det \begin{pmatrix} 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}?$$

(ii) Voor welke factor λ geldt de vergelijking:

$$\det \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ 3b_1 + 5c_1 & 3b_2 + 5c_2 & 3b_3 + 5c_3 \\ 7c_1 & 7c_2 & 7c_3 \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}?$$

(iii) Voor welke factor λ geldt de vergelijking:

$$\det \begin{pmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & a_3 + c_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}?$$

Opgave XXX

(i) Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is $\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *niet* inverteerbaar?

(ii) Voor welke combinatie van getallen $a, b \in \mathbb{R}$ is $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ wel inverteerbaar?

Opgave XXXI
Laten $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times m}$ en $C \in \mathbb{F}^{n\times m}$ en zij

$$M := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{(n+m)\times(n+m)}.$$

Toon aan dat $\det M = \det A \cdot \det B$.

Opgave XXXII

(i) Zij $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ en $\lambda \in \mathbb{F}$. Laat zien dat $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

(ii) Zij $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ met rijen $A_{1-}, A_{2-}, \dots, A_{n-}$. Zij $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ de matrix met de rijen van A in omgekeerde volgorde, d.w.z. $B_{1-} = A_{n-}, B_{2-} = A_{(n-1)-}, \dots, B_{n-} = A_{1-}$.
Geef $\det B$ afhankelijk van $\det A$ aan.

(iii) Bepaal $\det A$ voor $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ gegeven door $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i+j=n+1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$,
d.w.z. voor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \dots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & \dots & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & \dots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opgave XXXIII
Zij $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ van de vorm

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Laat zien dat $\det A = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_09/la2.html