Huiswerk week 7

Opgave 19.
Een $n \times n$-matrix van de vorm

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-2} & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

heet een *Vandermonde matrix*.
Laat zien dat $\det A = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$, d.w.z. $\det A$ is het product van alle factoren van de vorm $a_j - a_i$ met $j > i$.
(Hint: Veeg de eerste rij op een slimme manier (met behulp van naburige kolommen van achter naar voren), ontwikkel de determinant naar de eerste rij en haal uit de rijen van de resterende $(n-1) \times (n-1)$-matrix factoren zo dat dit weer een Vandermonde matrix wordt. Veronderstel dan dat de bewering voor $(n-1) \times (n-1)$-matrices al bewezen is (d.w.z. gebruik inductie).)

Opgave 20.

(i) Een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heet een *orthogonale* matrix als $A^t = A^{-1}$, m.a.w. als $AA^t = I_n$.

Laat zien dat voor een orthogonale matrix geldt dat $\det A = \pm 1$.

(ii) Een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heet *scheefsymmetrisch* als $A^t = -A$.

Laat zien dat voor een scheefsymmetrische matrix geldt dat $\det A = 0$ als n oneven is. Kan je ook voor even n een uitspraak doen?

Opgave 21.
Voor $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ noteren we met $\tilde{A}$ de geadjungeerde matrix van A.

(i) Laat zien dat $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$.

(ii) Stel dat A inverteerbaar is. Bewijs dat $\widetilde{A^{-1}} = \tilde{A}^{-1}$.

(iii) Druk $\tilde{\tilde{A}}$ (d.w.z. de geadjungeerde van de geadjungeerde) voor een inverteerbare matrix A alleen maar door A en $\det A$ uit.

Oefenopgaven week 7

Opgave XXXIV
Zij $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{dus } (A_n)_{ij} := \begin{cases} 2 & \text{als } i = j, \\ -1 & \text{als } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

Laat (bijvoorbeeld met inductie) zien dat $\det A_n = n+1$.
Hoe verandert het resultaat als op de plaats $(n-1, n)$ een -2 i.p.v. een -1 staat, dus als de 2×2 blok rechts onder $\boxed{\begin{matrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{matrix}}$ wordt?

Opgave XXXV

(i) Zij n even en zij $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ de scheefsymmetrische matrix met

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als } i < j \\ 0 & \text{als } i = j \\ -1 & \text{als } i > j \end{cases} \quad (\text{bijv. } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ voor } n = 4.)$$

Laat zien dat $\det A = 1$.
(Hint: Veeg de eerste twee kolommen in de rijen 3 t/m n.)

(ii) Zij $a \in \mathbb{F}$ en zij $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ met $a_{ij} := a^{|i-j|}$ (bijv. $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$ voor $n = 3$).
Bewijs dat $\det A = (1-a^2)^{n-1}$.
(Hint: Breng A op bovendriehoeksvorm.)

Opgave XXXVI

(i) Zij $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ een inverteerbare matrix. Laat zien dat dan ook A^t inverteerbaar is en dat $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(ii) Een matrix $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ heet *symmetrisch* als $A^t = A$. Laat zien dat voor een inverteerbare symmetrische matrix ook de inverse matrix symmetrisch is.

Opgave XXXVII
Voor een complexe matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ noteren we met $\overline{A}$ de matrix met in iedere component de complex geconjugeerde van A, d.w.z. $(\overline{A})_{ij} = \overline{A_{ij}}$.

(i) Laat zien dat $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

(ii) Een matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heet een *unitaire* matrix als $\overline{A^t} = A^{-1}$, m.a.w. als $A\overline{A^t} = I_n$.
Laat zien dat voor een unitaire matrix A geldt dat $|\det A| = 1$.

Opgave XXXVIII
Een *monomiale* matrix is een matrix met in iedere rij en iedere kolom precies één element ongelijk aan nul. I.h.b. heeft een monomiale $n \times n$-matrix dus precies n elementen ongelijk aan nul.
Laat zien dat voor een monomiale matrix $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ geldt dat $|\det(A)|$ gelijk aan het product van de niet-nul elementen van A is.

Opgave XXXIX
We noteren met $\tilde{A}$ de geadjungeerde matrix van A.

(i) Laat zien dat $\widetilde{A^t} = (\tilde{A})^t$.

(ii) Bewijs dat $\tilde{A}A = \det A \cdot I_n$ (we hadden tijdens het college alleen maar gezien dat $A\tilde{A} = \det A \cdot I_n$).

Opgave XL
Bepaal voor de volgende matrices de geadjungeerde matrix:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_09/la2.html