Huiswerk week 8

Opgave 22.
We hebben gezien dat voor een oplosbaar stelsel lineaire vergelijkingen met coëfficiëntenmatrix $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ en rechterzijde $b \in \mathbb{F}^m$ de verzameling van oplossingen een restklasse $x_0 + \operatorname{Ker} A$ is, waarbij $x_0 \in \mathbb{F}^n$ met $Ax_0 = b$.

(i) Laat zien dat er voor iedere lineaire deelruimte $U \subset \mathbb{F}^n$ en iedere vector $v \in \mathbb{F}^n$ een stelsel lineaire vergelijkingen met $m = n - \dim U$ vergelijkingen en n onbekenden bestaat dat precies de restklasse $v + U$ als oplossingen heeft.

(Hint: Laat zien dat de matrix met als *rijen* een basis van U een lineaire afbeelding met rang $\dim U$ is (dit hebben we tot nu toe alleen maar gezien als we een basis van U als *kolommen* van een matrix nemen). Maak met behulp van de kern van deze lineaire afbeelding een geschikt stelsel lineaire vergelijkingen.

(ii) Bepaal voor $n = 3$ een stelsel vergelijkingen met 2 vergelijkingen dat de verzameling $\{(x, y, z) = (a + 1, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ als oplossingen heeft.

Opgave 23.
Bepaal voor het stelsel lineaire vergelijkingen

$$\begin{array}{rcrcrcl} r \cdot x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & r \cdot y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & r \cdot z & = & 1 \end{array}$$

de verzameling van oplossingen, afhankelijk van de parameter $r \in \mathbb{R}$.

Opgave 24.
Vind een veelterm $ax^3 + bx^2 + cx + d$ van graad 3, waarvan de grafiek door de punten $(-1, 10)$, $(0, 4)$, $(1, 2)$ en $(2, -2)$ gaat.
(Hint: Beschouw de coëfficiënten a, b, c, d als onbekenden, dan geeft het invullen van de gegeven punten een stelsel lineaire vergelijkingen.)

Oefenopgaven week 8

Opgave XLI
Bepaal voor de volgende stelsels lineaire vergelijkingen de verzamelingen van oplossingen:

(i) $$\begin{array}{rcr} x_1 + 3x_2 & = & 5 \\ 2x_1 + 6x_2 & = & 10 \end{array}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(v)
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1$$

(vi)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$$

(vii)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Opgave XLII
Ga na welke van de volgende stelsels lineaire vergelijkingen een oplossing hebben:

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \phantom{{}+2x_4} &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(v)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/la2_09/la2.html