Tentamen Lineaire Algebra 2

- *Maak iedere opgave op een apart blad. Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer.*
- *Lees eerst de opgaven voordat je aan de slag gaat.*
- *Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!*
- *Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan.*

Opgave 1. (10 punten)

(i) Voor welke $\lambda \in \mathbb{R}$ is de matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

niet inverteerbaar? Bereken voor deze waarden van λ de rang van A.

(ii) Bepaal voor

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

de inverse matrix A^{-1} en de geadjungeerde matrix $\widetilde{A}$.

Opgave 2. (11 punten)

Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding en noteer voor $i = 1, 2, 3, \ldots$ met f^i de i-voudige samenstelling van f met zich zelf, d.w.z. $f^2(v) = f(f(v))$, $f^3 = f(f(f(v)))$ enz.

(i) Bewijs dat voor $i \geq 1$ geldt dat $\operatorname{Ker} f^i \subset \operatorname{Ker} f^{i+1}$ en $\operatorname{Im} f^{i+1} \subset \operatorname{Im} f^i$.

(ii) Laat zien dat voor alle $i \geq 1$ geldt: $\operatorname{Ker} f^i = \operatorname{Ker} f^{i+1} \Leftrightarrow \operatorname{Im} f^i = \operatorname{Im} f^{i+1}$.

(iii) Stel dat $f^m = 0$ de nulafbeelding is en dat m minimaal met deze eigenschap is.
Bewijs dat $m \leq n$.

z.o.z.

Opgave 3. (10 punten)
Voor twee vectoren $v = (x_1, \ldots, x_n), w = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ noteren we met $v \cdot w = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i$ het (standaard)inproduct.
Voor een lineaire deelruimte $U \subset \mathbb{R}^n$ definiëren we door

$$U^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid u \cdot w = 0 \text{ voor alle } u \in U\}$$

de lineaire deelruimte van vectoren die *loodrecht* op U staan.

(i) Bewijs dat $U \cap U^\perp = \{0\}$.

(ii) Laat zien dat $\dim U^\perp = n - \dim U$.
(Hint: Wat is de kern van de matrix met als rijen een basis van U?)

(iii) Laat zien dat $U + U^\perp = \mathbb{R}^n$ en bewijs dat iedere vector $v \in \mathbb{R}^n$ eenduidig te schrijven is als $v = v_\| + v_\perp$ met $v_\| \in U$ en $v_\perp \in U^\perp$.
(Je mag de uitspraken uit de delen (i) en (ii) hiervoor natuurlijk gebruiken.)

Opgave 4. (11 punten)
We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat een parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ bevat:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 1 \\ y + \lambda z &= 1 \\ -x + y + \lambda z &= \lambda. \end{aligned}$$

(i) Bepaal de waarden van de parameter λ waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft.

(ii) Geef alle waarden van λ aan waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.
(Licht je antwoord toe!)

(iii) Geef alle waarden van λ aan waarvoor het stelsel niet oplosbaar is.
(Licht je antwoord toe!)

(iv) Is er een waarde van λ, zo dat het stelsel een oplossing met $z = -\frac{1}{2}$ heeft? Bepaal in dit geval de oplossing.

Opgave 5. (8 punten)
Laten $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ willekeurige matrices zijn. Bewijs of weerleg (door een expliciet tegenvoorbeeld) de volgende uitspraken:

(i) $\det(A^{-1}BA) = \det B$ voor een inverteerbare matrix A.

(ii) $\det((A + B)^2) = \det A^2 + \det B^2 + 2\det(AB)$.

(iii) $\det B^3 < 0 \Rightarrow \det B < 0$.

(iv) Stel dat $\det A = 0$. Dan is $A + I_n$ inverteerbaar.

Succes ermee!