Tentamen Lineaire Algebra 2

Vermeld op ieder blad je naam en studentnummer. Lees eerst de opgaven voor dat je aan de slag gaat. Geef uitleg over je oplossingen; antwoorden zonder heldere afleiding worden als niet gegeven beschouwd!
Het gebruik van een rekenmachine is niet nodig en ook niet toegestaan,

Opgave 1. (10 punten)
Zij $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$(x, y, z, w) \mapsto (x - z, y + w, 2x + y).$$

(i) Bepaal een basis van $\operatorname{Ker} f$ en een basis van $\operatorname{Im} f$.

(ii) Geef een deelruimte $U \subset \mathbb{R}^4$ aan zo dat $f(U) = \operatorname{Im} f$ en zo dat de beperking van f op U een isomorfisme van U naar $\operatorname{Im} f$ is.
(Het is voldoende een basis van U aan te geven, maar je moet laten zien dat U inderdaad de gevraagde eigenschappen heeft.)

Oplossing:

(i) Het beeld van een basis is altijd een volledig stelsel voor $\operatorname{Im} f$, dus is $((1, 0, 2), (0, 1, 1), (-1, 0, 0), (0, 1, 0))$ (d.w.z. de beelden van de standaardbasis van $\mathbb{R}^4$) een volledig stelsel voor $\operatorname{Im} f$. Omdat $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, is dit zeker een lineair afhankelijk stelsel. De laatste drie van deze vier vectoren vormen echter een basis van $\operatorname{Im} f$, want $a(0, 1, 1)+b(-1, 0, 0)+c(0, 1, 0) = (-b, a+c, a)$ en uit $(-b, a + c, a) = (0, 0, 0)$ volgt rechtstreeks $b = 0$, $a = 0$ en dus ook $c = 0$, dus zijn de vectoren lineair onafhankelijk.

Omdat $\dim \operatorname{Im} f = 3$ volgt uit de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen dat $\dim \operatorname{Ker} f = 1$, een basis hiervoor is bijvoorbeeld $((1, -2, 1, 2))$.

Alternatief kan men eerst nagaan dat de kern 1-dimensionaal is en vervolgens concluderen dat het beeld 3-dimensionaal is, en dus de hele $\mathbb{R}^3$.

Een verdere mogelijkheid, die ook bij deel (ii) te pas komt is na te gaan dat de beelden van $(0, 0, -1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, -1)$ juist de standaardbasis van $\mathbb{R}^3$ zijn.

(ii) Omdat de beelden van de laatste drie vectoren uit de standaardbasis van $\mathbb{R}^4$ een basis van $\operatorname{Im} f$ vormen, is $U := \{(0, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y, z, w \in \mathbb{R}\}$ een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^4$ met $f(U) = \operatorname{Im} f$ en omdat $\dim U = \dim \operatorname{Im} f = 3$ is de beperking van f op U een isomorfisme van U naar $\operatorname{Im} f$.

Opgave 2. (8 punten)
Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een lineaire afbeelding.

(i) Laat zien dat $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) \leq \frac{1}{2}n$.

(ii) Geef voor $n = 5$ een expliciet voorbeeld van een lineaire afbeelding f met $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 2$.

Oplossing:

(i) Volgens de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen geldt $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$, dus is het minimum van $\dim \operatorname{Ker} f$ en $\dim \operatorname{Im} f$ hoogstens $\frac{1}{2}n$. Maar $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ en $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f$, dus is ook $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) \leq \frac{1}{2}n$.

(ii) Zij $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ gegeven door $(a, b, c, d, e) \mapsto (d, e, 0, 0, 0)$. Dan is $\operatorname{Ker} f = \{(a, b, c, 0, 0) \in \mathbb{R}^5 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Im} f = \{(a, b, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^5 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, en dus $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f$ en dus $\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f) = 2$.

Opgave 3. (9 punten)
Voor welke $a \in \mathbb{R}$ is de matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

inverteerbaar? Bereken voor deze waarden van a de inverse matrix A^{-1}.

Oplossing: De determinant van A is $\det A = a - 2$, dus is de matrix voor $a \neq 2$ inverteerbaar.
De inverse laat zich óf met behulp van de geadjungeerde matrix bepalen, óf met elementaire rijtransformaties. De stappen bij de elementaire rijtransformaties zijn:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-2} & \frac{-2}{a-2} & \frac{1}{a-2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a-2} & \frac{a}{a-2} & \frac{-1}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-2} & \frac{-2}{a-2} & \frac{1}{a-2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{a-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} & \frac{1}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a-2} & \frac{a}{a-2} & \frac{-1}{a-2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a-2} & \frac{-2}{a-2} & \frac{1}{a-2} \end{array}\right)$$

De inverse matrix is dus

$$A^{-1} = \frac{1}{a-2}\begin{pmatrix} a-1 & -a & 1 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Opgave 4. (6 punten)
Zij $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding met matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ten opzichte van een zekere basis (v_1, v_2, v_3) van $\mathbb{R}^3$).
Bewijs dat er een deelruimte $U \subset \mathbb{R}^3$ bestaat met $\dim U = 2$ en $f(U) \subset U$.

Oplossing: Zo'n deelruimte is $U := L(v_1, v_2)$. Het is duidelijk dat $\dim U = 2$ is. Verder geldt $f(v_1) = v_1 \in U$ en $f(v_2) = 3v_1 + 2v_2 \in U$. Omdat U een lineaire deelruimte is, is ook $f(v) \in U$ voor iedere $v \in U$, en dus $f(U) \subset U$.

Opgave 5. (7 punten)
Laten $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inverteerbare matrices zijn.

(i) Bewijs dat $\det(A^{-1}B^{-1}AB) = 1$.

(ii) Geldt ook dat $\det(AB - BA) = 0$? Geef een bewijs of een (expliciet) tegenvoorbeeld.

Oplossing:

(i) Er geldt $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ en $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$. Hieruit volgt

$$\begin{aligned}\det(A^{-1}B^{-1}AB) &= \det A^{-1} \cdot \det B^{-1} \cdot \det A \cdot \det B \\ &= (\det A)^{-1} \cdot (\det B)^{-1} \cdot \det A \cdot \det B = 1.\end{aligned}$$

(ii) Dit geldt bijna nooit. Zij $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, dan is

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

en $\det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 4$.

Opgave 6. (10 punten)
We bekijken het volgende stelsel lineaire vergelijkingen, dat een parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ bevat:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ -2x \qquad + 2z &= 2 \\ x + \lambda y + z &= 0. \end{aligned}$$

(i) Bepaal de waarden van de parameter λ waarvoor het stelsel precies één oplossing heeft.

(ii) Geef alle waarden van λ aan waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.
(Licht je antwoord toe!)

(iii) Geef alle waarden van λ aan waarvoor het stelsel niet oplosbaar is.
(Licht je antwoord toe!)

Oplossing:

(i) Het stelsel is eenduidig oplosbaar als de determinant van de bijhorende matrix niet nul is. Er geldt det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} = 2 - 4\lambda + 2 - 2\lambda = 4 - 6\lambda$.
Het stelsel is dus eenduidig oplosbaar voor $4 - 6\lambda \neq 0$, dus voor $\lambda \neq \frac{2}{3}$.

(ii)+(iii) Voor $\lambda = \frac{2}{3}$ brengen we de uitgebreide matrix van het stelsel op rijtrapvorm:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Voor $\lambda = \frac{2}{3}$ is het stelsel dus niet oplosbaar. Omdat het stelsel voor $\lambda \neq \frac{2}{3}$ een eenduidige oplossing heeft en voor $\lambda = \frac{2}{3}$ geen oplossing, zijn er geen waarden waarvoor het stelsel oneindig veel oplossingen heeft.

Succes ermee!