# Extreem principe

**Opgave 67.**
In het intergalactische parlement zitten alleen maar wezen die hooguit drie vijanden onder de andere leden van het parlement hebben (waarbij vijandschap wederzijds is). Toon aan dat het parlement zo in twee kamers gesplitst kan worden dat iedereen in zijn kamer hoogstens nog één vijand heeft.

**Opgave 68. (Sylvester, 1893)**
Stel dat een eindige verzameling van punten in het vlak de eigenschap heeft dat elke lijn door twee van de punten ook nog door een derde punt gaat. Toon aan dat alle punten op één lijn liggen. (Hint: Kijk naar de afstand van een punt die niet op een lijn door drie punten ligt.)

**Opgave 69.**
Laat zien dat in een convex veelvlak minstens twee van de zijvlakken door hetzelfde aantal ribben begrensd zijn (dus $n$-hoeken voor dezelfde $n$ zijn).

**Opgave 70.**
Toon aan dat er in een convexe veelhoek altijd 3 opeenvolgende hoeken $A$, $B$, $C$ bestaan, zo dat de omtrekcirkel om de driehoek $\Delta ABC$ de hele veelhoek overdekt. (Hint: Laat zien dat de grootste van de omtrekcirkels van drie willekeurige hoekpunten de gewenste eigenschap heeft.)

**Opgave 71.**
Vind alle reële oplossingen voor het stelsel vergelijkingen:

$$x_1 + x_2 = x_3^2, \quad x_2 + x_3 = x_4^2, \quad x_3 + x_4 = x_5^2, \quad x_4 + x_5 = x_1^2, \quad x_5 + x_1 = x_2^2.$$

(Hint: Bekijk het maximum en het minimum van de $x_i$. Onderscheid de gevallen of het minimum positief, nul of negatief is.)

**Opgave 72. Uitdaging**
Bij het banket voor koninginnedag worden $2n$ diplomaten aan een rond tafel geplaatst. Elke diplomaat heeft onder de andere diplomaten hoogstens $n-1$ rivalen naast wie hij per se niet wil zitten. Toon aan dat het mogelijk is de diplomaten zo te plaatsen dat niemand naast een rivaal komt te zitten.

## **Huiswerk** (in te leveren tot 9 mei 2005)

**Opgave 73.**
In het vlak heb je een verzameling van $2n$ punten met de eigenschap dat geen drie van de punten op een lijn liggen. De helft van de punten is rood gekleurd, de andere helft blauw. Laat zien dat je de punten in $n$ paren van een rood en een blauw punt kunt indelen zo dat de lijnstukken die de punten van één paar verbinden elkaar niet snijden. (Hint: Bekijk de som van de lengte van de lijnstukken.)

**Opgave 74.**
Vind alle reële oplossingen voor het stelsel vergelijkingen:

$$(x+y)^3 = z, \quad (y+z)^3 = x, \quad (z+x)^3 = y.$$

**Opgave 75.**
Op een circuit staan $n$ dezelfde auto's. Bij elkaar genomen hebben ze net zoveel benzine als één auto voor één ronde nodig heeft. Toon aan dat een van de auto's een volledige ronde kan rijden als hij bij ieder auto dat hij passeert het benzine over neemt (de andere auto's mogen dan natuurlijk niet rijden).