Grafen

Een *graaf* bestaat uit een verzameling van punten en een verzameling van ribben, waarbij elke ribbe precies twee punten verbindt. Een *pad* is een rij van ribben, waarbij twee naburige ribben (minstens) één punt gemeenschappelijk hebben. Een graaf heet *samenhangend* als er tussen elk paar van punten een pad bestaat. De *graad* van een punt van een graaf is het aantal ribben dat dit punt met een punt van de graaf verbindt (en lus van een punt naar zich zelf wordt twee keer geteld).

Opgave 94.
Een *Euler pad* in een graaf G is een pad die elke ribbe van G precies één keer bevat. Een *Euler circuit* is een gesloten Euler pad. Bewijs de volgende stelling:

> *Een samenhangende graaf G heeft een Euler circuit dan en slechts dan als alle punten van G even graad hebben, G heeft een Euler pad die geen circuit is dan en slechts dan als precies twee punten oneven graad hebben. In dit geval zijn de punten van oneven graad de begin- en eindpunten van het Euler pad.*

Gebruik hiervoor (bijvoorbeeld) de volgende stappen:

(i) De som van de graden van de punten van G is gelijk aan het dubbele van het aantal ribben van G. In het bijzonder is er een even aantal oneven punten.

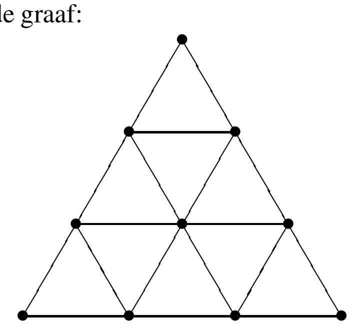
(ii) Als G een Euler pad heeft, dan heeft G of 0 of 2 oneven punten.

(iii) Stel G heeft geen oneven punten. Als P een pad in G is die geen ribben twee keer bevat en die niet voortgezet kan worden (omdat aan zijn eindpunt alle ribben al gebruikt zijn), dan is P een gesloten pad.

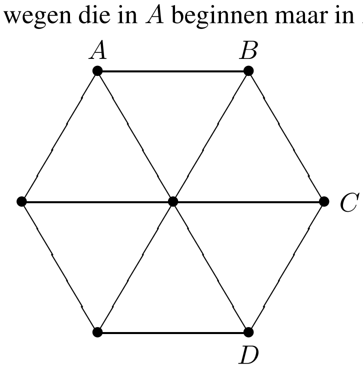
(iv) Als G geen oneven punten heeft, dan heeft G een Euler circuit.

(v) Als G precies twee oneven punten heeft, dan heeft G een Euler pad.

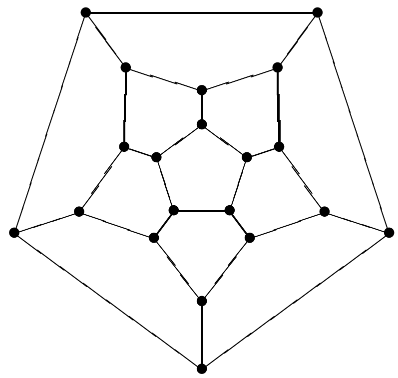
Opgave 95.
Vind een Euler circuit in de volgende graaf:



Opgave 96.
Het volgende plaatje geeft de wegen in een rozentuin aan. Natuurlijk wil je graag alle rozen zien en daarom alle wegen (ribben) minstens één keer langs lopen. Uit Opgave 94 kunnen we concluderen dat er geen Euler pad in deze tuin bestaat en dat dus sommige wegen meermaals bewandeld moeten worden. Wat is het kortste circuit dat alle wegen bevat en in A begint en eindigt (als elke ribbe bijvoorbeeld $20m$ lang is)? Hoe zit het met paden langs alle wegen die in A beginnen maar in B, C of D eindigen?

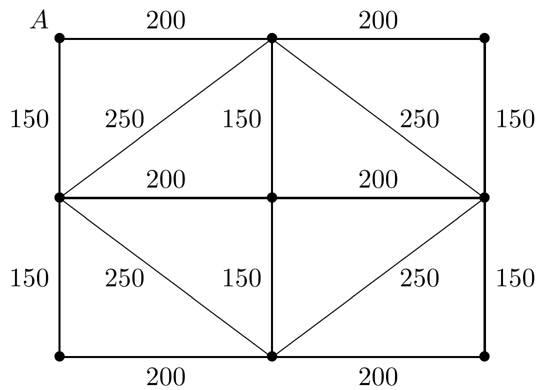


Opgave 97.
Een *Hamilton pad* in een graaf G is een pad die ieder punt van G precies één keer bevat. Een *Hamilton circuit* is een Hamilton pad die naar het uitgangspunt terug komt.
Vind een Hamilton circuit in de dodecaëder-graaf die in het figuur hieronder afgebeeldt is.



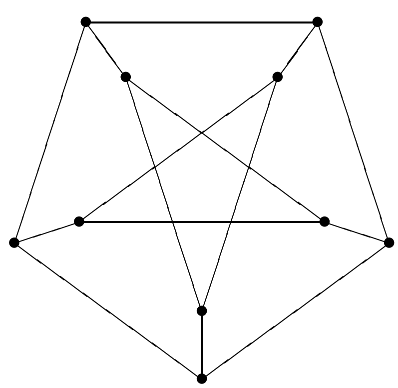
Huiswerk (in te leveren tot 6 juni 2005)

Opgave 98.
De postbode moet de wegen van de onderstaande plattegrond afhandelen. De lengtes van de wegen zijn aan de ribben aangegeven.



Hoe lang is het kortste pad, als hij in willekeurige punten mag beginnen en eindigen? Hoe lang is het kortste circuit dat in A begint en eindigt?

Opgave 99.
In het figuur hieronder zie je de *Petersen graaf* (die geen platte graaf is, omdat hij niet zo te tekenen is, dan geen ribben elkaar snijden).



(i) Laat zien: Als je in de Petersen graaf een punt en de daarmee verbonden ribben verwijdert, heeft de zo verkregen graaf een Hamilton circuit.

(ii) Vind een Hamilton pad in de Petersen graaf.

(iii) Ga na dat de Petersen graaf geen Hamilton circuit bevat.