Inductie

Het inductie principe zegt: Als een uitspraak $U(0)$ waar is en als $U(n) \Rightarrow U(n+1)$ dan is $U(n)$ waar voor alle $n \in \mathbb{N}$. Soms is de volgende (equivalente) versie handig: Als een uitspraak $U(n_0)$ waar is en als $\{U(k) \mid n_0 \leq k \leq n\} \Rightarrow U(n+1)$ dan is $U(n)$ waar voor alle $n \in \mathbb{Z}$ met $n \geq n_0$.

Opgave 85.

We definiëren een rij (a_n) door $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \sqrt{2}^{a_n}$, dus $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ enz. Toon aan dat de rij (a_n) stijgend is en dat $a_n < 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Concludeer dat (a_n) een convergente rij is en bepaal de limiet.

Opgave 86.
Gegeven is een graaf met $2n$ punten en $n^2 + 1$ ribben. Toon aan dat er een drietal punten bestaat die paarsgewijs verbonden zijn.
(Merk op: Voor grafen met $2n$ punten en n^2 ribben is deze uitspraak niet noodzakelijk waar. Verzin een tegenvoorbeeld.)

Opgave 87.
Zij $p \in \mathbb{Z}$ oneven en laten x_1, x_2 de nulpunten van de veelterm $x^2 + px - 1$ zijn. Definieer $y_n := x_1^n + x_2^n$. Toon aan dat $y_n \in \mathbb{Z}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en dat $\mathrm{ggd}(y_n, y_{n+1}) = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 88.
De *Fibonacci rij* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is gedefinieerd door: $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_{n+1} := F_{n-1} + F_n$ voor $n \geq 1$.

(i) Toon aan dat $\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$.

(ii) Zij $\alpha := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ en $\beta := 1 - \alpha = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Bewijs Binet's formule:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

en concludeer dat $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$.
(Hint: Er geldt $\alpha + \beta = 1$ en $\alpha \cdot \beta = -1$.)

Opgave 89.
Bewijs de volgende identiteiten voor de Fibonacci rij $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$, (ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} F_{2i+1} = F_{2n+2}$, (iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$,

(iv) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$, (v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2n-1} F_i F_{i+1} = F_{2n}^2$.

Opgave 90. Uitdaging
Toon aan dat $m \mid n \Rightarrow F_m \mid F_n$ en bewijs dat $\mathrm{ggd}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{ggd}(m,n)}$.

Huiswerk (in te leveren tot 30 mei 2005)

Opgave 91.
Bewijs de volgende identiteiten voor de Fibonacci rij $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

(i) $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$, (ii) $F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}$,

(iii) $F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_{2n}$, (iv) $F_n^2 + 2F_{n-1}F_n = F_{2n}$,

(v) $F_nF_{n+1} - F_{n-2}F_{n-1} = F_{2n-1}$, (vi) $F_{n-1}F_n - F_{n-2}F_{n+1} = (-1)^n$.

(Hint: Soms zou opgave 88 nuttig blijken.)

Opgave 92.
Een algemene n-hoek is een samenhangende graaf met n punten en n ribben, zo dat ieder punt met precies twee andere punten door een ribbe verbonden is en geen ribben elkaar snijden. In het bijzonder hoeft een algemene n-hoek niet convex te zijn. Toon voor $n \geq 4$ de volgende beweringen aan:

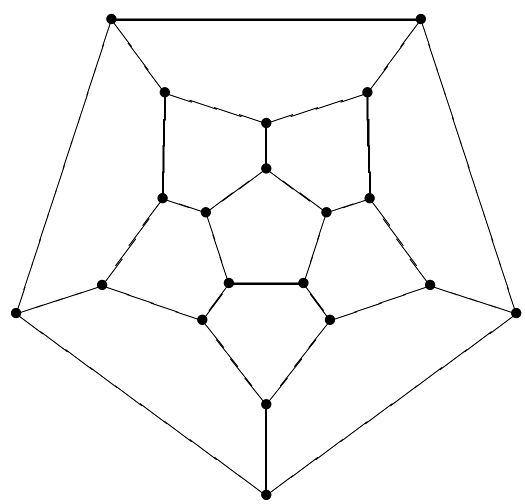
(i) Er bestaat een diagonaal (een verbinding vaan twee punten die niet door een ribbe verbonden zijn), die helemaal binnen de n-hoek ligt.

(ii) De n-hoek kan met behulp van diagonalen, die binnen de n-hoek liggen en elkaar niet snijden, in driehoeken onderverdeeld worden. Zo iets noemen we een *triangulatie*.

(iii) De punten in de getrianguleerde n-hoek kunnen met drie kleuren zodanig gekleurd worden, dat twee punten die door een ribbe of door een diagonaal verbonden zijn verschillende kleuren hebben.

(iv) De driehoeken in de getrianguleerde n-hoek kunnen met twee kleuren zodanig gekleurd worden, dat twee driehoeken die een gemeenschappelijke diagonaal hebben verschillende kleuren hebben.

Opgave 93. (Formule van Euler)
Zij G een *samenhangende platte graaf* met P hoekpunten en R ribben. In een platte graaf mogen de ribben elkaar niet snijden (behalve in de hoekpunten) maar het is toegestaan dat twee hoekpunten door meer dan één ribbe verbonden zijn (die dan krom moeten zijn). Dat G samenhangend is betekent dat er van elke hoekpunt een pad (via de ribben) naar elke andere hoekpunt bestaat. Het aantal vlakken die door de ribben van G ingesloten zijn noemen we V, waarbij ook het buitengebied als een vlak geldt. In het plaatje zie je bijvoorbeeld de graaf van de dodecaëder met $P = 20$, $R = 30$ en $V = 12$.



Toon aan: Voor de aantallen van hoekpunten, ribben en vlakken geldt de relatie

$$P - R + V = 2.$$

(Hint: Inductie over het aantal ribben.)