

Spelen met kansen

Opgave 100. (Monty Hall)

Bij een televisie show heeft een kandidaat de kans om een auto te winnen. Hiervoor moet hij één van drie deuren kiezen, waarbij achter twee van de deuren een geit staat en achter de derde de auto. Nadat de kandidaat een deur heeft gekozen zegt de showmaster (die weet waar de auto staat): 'Wacht, ik geef je even een hint'. Hij opent een van de niet gekozen deuren en een geit blaait vrolijk tegen de kandidaat. Zou de kandidaat nu bij zijn keuze blijven of de andere deur kiezen?

Opgave 101.

Op de dag vóór een koninklijke verjaardag beslist de koningin om twee van haar drie favoriete gevangenen vrij te laten. Ze geeft haar keuze aan de bewaker door maar legt hem op, vóór de verjaardag niets aan de gevangenen door te geven. Natuurlijk kan de bewaker niet helemaal zwijgen, daarom vertelt hij aan de gevangenen, dat twee van hun vrij gelaten zullen worden. Een van de gevangenen (die wegens geluksspel in het gevangenis zit) redeneert nu het volgende:

De bewaker zou me zeker één van de andere noemen die vrij gelaten wordt, want dan heeft hij mij niet vertelt wat met mij gebeurt. Maar dan zijn er nog twee van ons over waarvan slechts één vrij gelaten wordt, dus is mijn kans om vrij te komen dan $1/2$, terwijl hij nu $2/3$ is. Dus laat ik de bewaker liever niet vragen.

Is deze redenering juist?

Opgave 102.

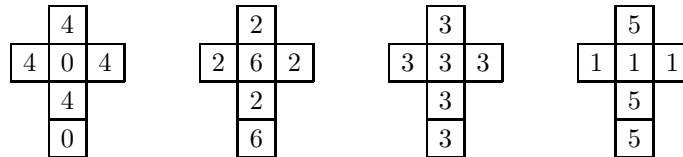
Een oude vrouw heeft twee papegaaien, een groene en een rode. Een bezoeker wil weten of de vogels allebei mannelijk zijn.

- (i) Als hij vraagt: 'Is een van de vogels mannelijk?' en de vrouw antwoordt met 'Ja', wat is dan de kans dat beide papegaaien mannelijk zijn?
- (ii) Als hij vraagt: 'Is de groene papegaai mannelijk?' en de vrouw antwoordt met 'Ja', wat is dan de kans op twee mannelijke vogels?

Licht je antwoorden toe.

Opgave 103.

Je maakt een spel met de volgende vier *rare* dobbelstenen.



De eerste speler kiest één van de dobbelstenen, de tweede een andere. Vervolgens wordt gewoon gedubbeld en degene met de hogere cijfer wint. Wat is de beste keuze voor de eerste speler? Wat is de strategie waarmee de tweede speler zijn dobbelsteen kiest? Kan je de kans berekenen waarmee de tweede speler in dit spel zou winnen?

Opgave 104.

We breken een stok *toevallig* in drie stukken en willen de kans bepalen dat we uit de drie stukken een driehoek kunnen vormen (hiervoor moet elk stuk korter dan de som van de twee andere stukken zijn). Het 'toevallig' breken kan op verschillende manieren:

- (i) Je kiest twee punten toevallig op de stok en breekt hem vervolgens in deze punten.
- (ii) Je breekt de stok in een toevallig gekozen punt, kiest vervolgens (toevallig) één van de twee stukken en breekt dit nog eens in een toevallig gekozen punt.

Bereken voor beide gevallen de kans dat je uit de drie stukken een driehoek kunt vormen.

Opgave 105. Uitdaging

Twee spelers gokken op de uitkomsten van het werpen van een munt. Hiervoor kiest eerst speler A een patroon van twee opeenvolgende worpen, bijvoorbeeld *kop, munt* (KM). Vervolgens kiest speler B een ander patroon (bijvoorbeeld MK). Nu wordt de munt gegooid en degene wiens patroon eerst voorkomt, wint (als $KKKM$ valt wint bijvoorbeeld speler A).

Ga na dat B zijn patroon steeds zo kan kiezen dat hij met een kans van minstens $1/2$ wint. Laat ook zien dat er keuzes van A zijn waar B met kans $3/4$ kan winnen.

Als het spel op drie opeenvolgende worpen uitgebreid wordt (dus A kiest bijvoorbeeld *kop, munt, kop*), wordt het ingewikkelder, maar ook interessanter. Je kunt dan namelijk bewijzen dat B zijn patroon steeds zo kan kiezen dat hij met een kans van minstens $2/3$ wint.

Opgave 106. Uitdaging

Drie mensen, A , B en C , beslissen in een *triël* hun rivaliteit op te lossen. De regels hiervoor zijn als volgt: Iedereen heeft een pistool met twee kogels en ze komen op gelijke afstanden van elkaar te staan. Vervolgens mag eerst A schieten, dan B , dan C en dan weer A enzovoorts. Als iemand al dood is, wordt die overgeslagen. De volgorde is op deze manier bepaald omdat A slechts met kans $2/3$ tref, B met kans $3/4$ en C met kans 1. We nemen aan dat de schutter steeds op degene mikt die het beste tref, want er laat zich aantonen dat dit zijn overlevenskans maximaliseert.

- (i) Bepaal welke kansen A , B en C hebben om het triël te overleven. Is het mogelijk dat zelfs twee mensen over blijven en wat is de kans hiervoor?
- (ii) Is het voor A gunstiger dat zijn eerste schot raak is of dat hij mist?