Ongelijkheden

In deze les zijn alle getallen positieve reële getallen.

Opgave 76.
Toon voor twee getallen a, b de volgende keten van ongelijkheden aan:

$$\min(a,b) \leq \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} (= \frac{2ab}{a+b}) \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b).$$

In woorden heet dit: minimum $\leq$ harmonisch gemiddelde $\leq$ meetkundig gemiddelde $\leq$ rekenkundig gemiddelde $\leq$ kwadratisch gemiddelde $\leq$ maximum.

Opgave 77.
Toon aan:

(i) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

(ii) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$.

(iii) Als $a+b+c=1$, dan is $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$.

Opgave 78.
Neem aan dat $a_1a_2\ldots a_n = 1$. Toon aan dat $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n$.

Opgave 79. (Cauchy-Schwarz)
Bewijs de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz (of Cauchy-Bunyakowski):

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2).$$

Toon aan dat gelijkheid geldt dan en slechts dan als $a_1/b_1 = \ldots = a_n/b_n = c$, dus als de vectoren $(a_1,\ldots,a_n)$ en $(b_1,\ldots,b_n)$ lineair afhankelijk zijn.
(Hint: Kijk bijvoorbeeld naar de som $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(a_ib_j-a_jb_i)^2$.)

Opgave 80.
Laat zien dat $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$. Concludeer dat $(a_1+\ldots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}) \geq n^2$.
(Dit geeft de ongelijkheid $\left(\frac{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ tussen het harmonisch en rekenkundig gemiddelde van n getallen.)

Opgave 81. Uitdaging
Toon de ongelijkheid tussen het meetkundig en rekenkundig gemiddelde van n getallen aan, d.w.z. laat zien dat $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

Huiswerk (in te leveren tot 23 mei 2005)

Opgave 82.
Toon aan dat

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

dus het rekenkundig gemiddelde is niet groter dan het kwadratisch gemiddelde.

Opgave 83.
Laten $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ reële getallen zijn. Laat zien dat onder alle permutaties $c_1,\ldots,c_n$ van de reële getallen $b_1,\ldots,b_n$ de som $a_1c_1+\ldots+a_nc_n$ maximaal is als $c_1 \geq \ldots \geq c_n$ en minimaal als $c_1 \leq \ldots \leq c_n$.

Opgave 84.
De driehoeksongelijkheid zegt dat in een driehoek een zijde altijd korter is dan de som van de twee andere zijden. Toon aan dat de volgende formuleringen voor drietallen van positieve reële getallen equivalent zijn:

(i) $a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b$.

(ii) $a>|b-c|, \quad b>|c-a|, \quad c>|a-b|$.

(iii) $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0$.

(iv) Er bestaan $x,y,z>0$ met $a=y+z, \quad b=z+x, \quad c=x+y$.