# Opdrachten 1

**Opgave 1.**
Zij $\tau := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ de gouden snede.

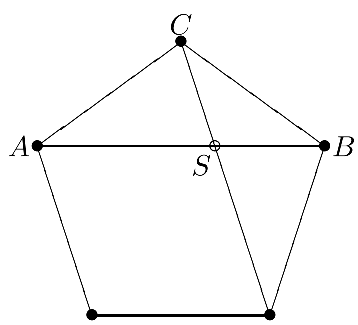
(i) Ga na dat $\tau^2 = \tau + 1$ en $\tau^{-1} = \tau - 1$.

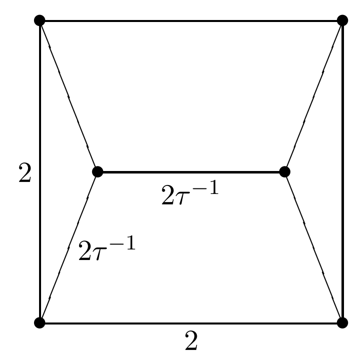
(ii) Bewijs dat in een reguliere vijfhoek met zijde 1 de diagonalen lengte $\tau$ hebben. Bekijk hiervoor de linker schets hieronder: De driehoeken $ABC$ en $BCS$ zijn gelijkbenig omdat de vijfhoek regulier is. Verder zijn deze twee driehoeken gelijkvormig omdat ze (bij $B$) een gemeenschappelijke hoek hebben. Concludeer dat ook de driehoek $SCA$ gelijkbenig is en bereken hieruit de lengtes van de stukken $AS$ en $SB$.

(iii) Voor de constructie van een dodecaëder plakken we op elk van de zijden van een kubus met hoekpunten $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ daken vast, die we telkens uit de delen van twee reguliere vijfhoeken construeren. Hiervoor knippen we de vijfhoeken langs een diagonaal in twee stukken, zo dat we een trapezium en een driehoek krijgen. Twee van deze trapeziums plakken we langs de korte evenredige zijde aan elkaar en voegen de driehoeken in (zie de rechter schets hieronder).

Omdat de kubus zijden van lengte 2 heeft, hebben we volgens (ii) reguliere vijfhoeken van zijde $2\tau^{-1}$ nodig.

Laat zien dat de daken die we uit de delen van de vijfhoeken bouwen hoogte $\tau - 1$ hebben. Hiervoor is misschien de rechter schets hieronder (die zo'n dak van boven toont) en de stelling van Pythagoras handig.




(iv) We moeten de daken zo op de zijden van de kubus plakken dat de lange zijde van een driehoek van één dak aan de lange zijde van een trapezium van een naburig dak stoot. We moeten nu nog aantonen dat de zo samenkomende driehoeken en trapeziums *platte* vijfhoeken vormen. Uit (iii) volgt dat een van de trapeziums van het dak op het bovenvlak de coördinaten $(-\tau^{-1}, 0, \tau)$, $(\tau^{-1}, 0, \tau)$, $(-1, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ heeft. De hier in de laatste twee punten aan vastgeplakte driehoek heeft als derde hoekpunt het punt $(0, \tau, \tau^{-1})$. Ga dit na en laat zien dat deze vijf punten inderdaad in een 2-dimensionaal vlak liggen.

(v) Bouw zelf een dodecaëder.

**Opgave 2.**
Een tegeling van het 2-dimensionale vlak met reguliere veelhoeken (die verschillende aantallen hoekpunten mogen hebben) heet een *half-reguliere vlakvulling* als alle hoekpunten congruent zijn. Hierbij noemen we twee hoekpunten congruent als ze door dezelfde types $n$-hoeken in dezelfde volgorde omringd zijn.
Bepaal alle half-reguliere vlakvullingen.