Opdrachten 2

Opgave 3.
We gaan na dat er een 4-dimensionale reguliere polytoop bestaat die Schläfli symbool $\{4,3,3\}$ heeft en die we als 4-dimensionale kubus kunnen beschouwen (en dus *hyperkubus* noemen). Als normaalvectoren kiezen we de vectoren van de standaardbasis in $\mathbb{R}^4$ en hun negatieven, dus de 8 vectoren

$$v_{1,\ldots,8} := \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Als inproduct kiezen we voor alle vectoren $a_1 = \ldots = a_8 = 1$. We definiëren nu een polytoop als doorsnede van de halfruimtes $H_i := \{w \in \mathbb{R}^4 \mid (v_i, w) \le 1\}$, dus

$$P := \{w \in \mathbb{R}^4 \mid (v_i, w) \le 1 \text{ voor alle } 1 \le i \le 8\}.$$

(i) Toon aan dat P eindig is door te laten zien dat

$$w = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow -1 \le x, y, z, t \le 1.$$

(ii) Een hoekpunt is de doorsnede van 4 lineair onafhankelijke hypervlakken. Ga na hoe je uit de vectoren $v_1, \ldots, v_8$ vier lineair onafhankelijke vectoren kunt kiezen en concludeer dat P de 16 hoekpunten $\begin{pmatrix}\pm1\\\pm1\\\pm1\\\pm1\end{pmatrix}$ heeft.

(iii) Twee hoekpunten zijn door een ribbe verbonden als ze op drie gemeenschappelijke hypervlakken liggen. Bewijs dat twee hoekpunten van P dan en slechts dan door een ribbe verbonden zijn als ze alleen maar in één coördinaat verschillen.

(iv) Uit (iii) volgt dat elke hoekpunt met vier andere hoekpunten door een ribbe verbonden is, dus bestaat de link van een hoekpunt uit vier punten. Ga na dat de link van $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ de hoekpunten $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ bevat.

Je ziet makkelijk in dat deze vier punten in het hypervlak liggen dat door de vergelijking $x + y + z + t = 2$ gedefinieerd is, dus het hypervlak met normaalvector $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ en inproduct 2. Bewijs nu dat de vier punten van de link inderdaad een tetraëder vormen door na te gaan dat ze onderling alle dezelfde afstand hebben. (Een analoog argument werkt voor de link van elke andere hoekpunt.)

(v) Toon aan dat de cel met normaalvector $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ de hoekpunten $\begin{pmatrix}1\\\pm1\\\pm1\\\pm1\end{pmatrix}$ bevat en concludeer dat de cellen van P gewone 3-dimensionale kubussen zijn. (Ook hier geldt een analoog argument voor de andere cellen.)

(vi) De cellen van de link van een hoekpunt corresponderen met de cellen die in dit hoekpunt samen komen. In ons geval is de link een tetraëder en heeft dus 4 cellen (zijvlakken). Ga na welke vier cellen in het hoekpunt $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ samen komen.