Opdrachten 3

We hebben tijdens het college de volgende stelling bewezen:

Stelling: Zij P een n-dimensionale reguliere polytoop met Schläfli-symbool $\{r_1, \ldots, r_{n-1}\}$ en zij P' de link van een van de hoekpunten van P. Verder zij 2φ de hoek tussen twee door een ribbe verbonden hoekpunten van P (gezien vanuit het middelpunt van P). Voor $\rho(P) := \sin^2(\varphi)$ geldt dan:

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2(\frac{\pi}{r_1})}{\rho(P')}.$$

Omdat in het bijzonder $\rho(P) > 0$ moet zijn, volgt hieruit dat $\cos^2(\dfrac{\pi}{r_1}) < \rho(P')$.

De reguliere veelhoeken hebben Schläfli-symbool $\{p\}$ en er geldt $\rho(\{p\}) = \sin^2(\frac{\pi}{p})$.

Ook de reguliere veelvlakken hebben we al bepaald, dit zijn de Platonische lichamen:

$\{3,3\}$: Er geldt $\sin^2(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{4}$ en $\cos^2(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$, dus $\rho(\{3,3\}) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

$\{4,3\}$: Er geldt $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, dus $\rho(\{4,3\}) = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$\{5,3\}$: Er geldt $\cos^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$, dus $\rho(\{5,3\}) = 1 - \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{6} = \frac{3-\sqrt{5}}{6}$.

$\{3,4\}$: Er geldt $\sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ en $\cos^2(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$, dus $\rho(\{3,4\}) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$\{3,5\}$: Er geldt $\sin^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ en $\cos^2(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}$, dus $\rho(\{3,5\}) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = 1 - \frac{2}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$.

Opgave 4.
Bewijs dat de enige mogelijke 4-dimensionale reguliere polytopen Schläfli-symbolen

$$\{3,3,3\}, \quad \{4,3,3\}, \quad \{5,3,3\}, \quad \{3,4,3\}, \quad \{3,3,4\} \quad \text{en} \quad \{3,3,5\}$$

hebben. Laat ook zien dat alleen maar de polytopen met symbolen $\{3,3,3\}$ en $\{3,3,4\}$ de link van een 5-dimensionale reguliere polytoop kunnen zijn.

Aanwijzing: Ga voor elke Platonische lichaam P' met symbool $\{p,q\}$ na voor welke waarden van r hij de link van een 4-dimensionale reguliere polytoop met symbool $\{r,p,q\}$ kan zijn. De cruciale eigenschap hierbij is, dat $\cos^2(\frac{\pi}{r}) < \rho(\{p,q\})$ moet gelden. Bepaal voor de gevonden polytopen de waarden van $\rho(\{r,p,q\})$ om te zien, of ze de link van een 5-dimensionale reguliere polytoop kunnen zijn.

Opgave 5.
Bewijs dat voor $n \geq 5$ de Schläfli-symbolen

$$\{\underbrace{3,\ldots,3}_{n-1}\}, \quad \{4,\underbrace{3,\ldots,3}_{n-2}\} \quad \text{en} \quad \{\underbrace{3,\ldots,3}_{n-2},4\},$$

de enige mogelijke Schläfli-symbolen van n-dimensionale reguliere polytopen zijn.

Aanwijzing: Bewijs per inductie: $\rho(\{\underbrace{3,\ldots,3}_{n-1}\}) = \frac{n+1}{2n}$, $\rho(\{4,\underbrace{3,\ldots,3}_{n-2}\}) = \frac{1}{n}$, $\rho(\{\underbrace{3,\ldots,3}_{n-2},4\}) = \frac{1}{2}$.

Concludeer dat alleen maar $\{3,\ldots,3\}$ en $\{3,\ldots,3,4\}$ de link van een reguliere polytoop in dimensie $n+1$ kunnen zijn. Voor $n = 4$ heb je deze beweringen al in de vorige opgave bewezen, dit is het inductie begin.