Opdrachten 4

Als de noordpool van een 4-dimensionale kogel de coördinaten $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix}$ heeft, dan is de Schlegel projectie van een punt X de vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ waarvoor het punt $X' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ op de lijn door N en X ligt.

Omdat de vector X' loodrecht op de vector N moet staan, laat zich het punt X' met behulp van het standaardinproduct $(\cdot, \cdot)$ berekenen als

$$X' = N + t(X - N) \quad \text{met} \quad t = \frac{(N,N)}{(N,N) - (X,N)}.$$

De Schlegel projectie krijgt men dan door weglaten van de vierde coördinaat (die sowieso 0 is).

Opgave 6.
De 24-cel met Schläfli symbool $\{3,4,3\}$ heeft de 24 hoekpunten

$$\begin{pmatrix} \pm1 \\ \pm1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm1 \\ 0 \\ \pm1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm1 \\ \pm1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \pm1 \\ 0 \\ \pm1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm1 \\ \pm1 \end{pmatrix}.$$

De vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ is de normaalvector van een cel en omdat de hoekpunten afstand $\sqrt{2}$ van het nulpunt hebben, kiezen we $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ als noordpool van de kogel waar de hoekpunten op liggen.

(i) Bereken de Schlegel projectie van de hoekpunten van de 24-cel.

(ii) Laat zien dat in de projectie 6 van de hoekpunten een grote octaëder met straal $2 + \sqrt{2}$ vormen en 6 andere hoekpunten een kleine octaëder met straal $2 - \sqrt{2}$.

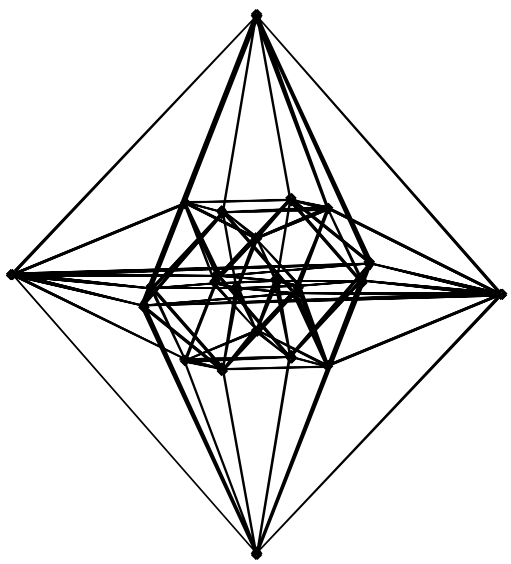
Ga na dat deze twee octaëders inderdaad cellen van de 24-cel zijn (d.w.z. dat de originele punten in een hypervlak liggen). Wat zijn de normaalvectoren van deze cellen?

(iii) Laat zien dat de projecties van de andere 12 hoekpunten de middelpunten van de ribben van een kubus met hoekpunten $\begin{pmatrix} \pm1 \\ \pm1 \\ \pm1 \end{pmatrix}$ zijn.

Ga na dat de vier punten op een zijvlak van deze kubus samen met een punt van de grote en een punt van de kleine octaëder ook een cel vormen. Dit geeft 6 verdere cellen van de 24-cel. Wat zijn in dit geval de normaalvectoren?

(iv) De resterende 16 cellen hebben de normaalvectoren $\begin{pmatrix}\pm1\\\pm1\\\pm1\\\pm1\end{pmatrix}$. Laat aan de hand van één van deze cellen zien, dat deze cellen in de Schlegel projectie vertekende antiprisma's worden. Ga bijvoorbeeld na dat in het geval van de cel met normaalvector $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ de projectie een antiprisma wordt met als grondvlak een zijvlak van de grote octaëder uit (ii) en als bovenvlak een gelijkzijdige driehoek die door de middelpunten van de ribben rond een hoekpunt van de kubus uit (iii) gevormd wordt.

In feite zijn alle cellen met een normaalvector die 1 in de vierde coördinaat heeft van dit type. Als de normaalvector van de cel een -1 in de vierde coördinaat heeft, is het grondvlak van het antiprisma een zijvlak van de kleine octaëder uit (ii).



Schlegel projectie van de 24-cel

Eindopdrachten

Lever Opgave 1 van de Opdrachten 1 (inclusieve de zelf gebouwde dodecaëder) en Opgave 6 van de Opdrachten 4 tot uiterlijk 24 maart 2005 op mijn kamer (N2024) of in mijn postvak in het secretariaat wiskunde (N2036) in.

Een dictaat voor dit onderwerp van het Kaleidoscoop en verdere informatie over het vak *Oriëntatie* is te vinden op de webpagina

http://www.math.ru.nl/~souvi/orientatie_05/index.html .