

# Platonische lichamen en andere reguliere polytopen

Bernd Souvignier

Voorjaar 2005

## Inhoud

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>De platonische lichamen</b>  | <b>2</b>  |
| 1.1      | Reguliere veelhoeken . . . . .  | 2         |
| 1.2      | Reguliere veelvlakken . . . . .                                       | 3         |
| 1.3      | Realisatie van de platonische lichamen . . . . .                      | 5         |
| 1.3.1    | Meetkundige constructies . . . . .                                    | 5         |
| 1.3.2    | Beschrijving door coördinaten . . . . .                               | 7         |
| <b>2</b> | <b>Veralgemening van Platonische lichamen naar hogere dimen-</b>      |           |
|          | <b>sies</b>   | <b>10</b> |
| 2.1      | Beschrijving van polytopen door hypervlakken . . . . .                | 10        |
| 2.2      | De link van een hoekpunt . . . . .                                    | 14        |
| <b>3</b> | <b>De classificatie van reguliere polytopen</b>                       | <b>17</b> |
| 3.1      | Het Schläfli symbool . . . . .  | 17        |
| 3.2      | De stelling van Schläfli . . . . .                                    | 18        |
| <b>4</b> | <b>Realisatie van <math>n</math>-dimensionale reguliere polytopen</b> | <b>23</b> |
| 4.1      | De oneindige series . . . . .   | 23        |
| 4.1.1    | De $n$ -dimensionale kubus $\{4, 3, \dots, 3\}$ . . . . .             | 23        |
| 4.1.2    | De $n$ -dimensionale cokubus $\{3, \dots, 3, 4\}$ . . . . .           | 23        |
| 4.1.3    | De $n$ -dimensionale simplex $\{3, \dots, 3\}$ . . . . .              | 24        |
| 4.2      | De uitzonderlijke reguliere polytopen in dimensie 4 . . . . .         | 24        |
| 4.2.1    | De 24-cel $\{3, 4, 3\}$ . . . . .                                     | 25        |
| 4.2.2    | De 600-cel $\{3, 3, 5\}$ . . . . .                                    | 26        |
| 4.2.3    | De 120-cel $\{5, 3, 3\}$ . . . . .                                    | 27        |
| 4.3      | Schlegel projecties . . . . .   | 27        |
| 4.3.1    | Schlegel projecties van de Platonische lichamen . . . . .             | 28        |
| 4.3.2    | Schlegel projecties voor de 4-dimensionale reguliere poly-            |           |
|          | topen . . . . .   | 29        |

# 1 De platonische lichamen

We zullen het in deze cursus altijd over *convexe* verzamelingen  $V \subseteq \mathbb{R}^d$  hebben, hiermee wordt bedoeld dat met twee vectoren  $v, w \in V$  ook hun verbinding volledig in  $V$  ligt, d.w.z. dat  $(1 - \lambda)v + \lambda w \in V$  voor alle  $\lambda \in [0, 1]$ .

## 1.1 Reguliere veelhoeken

**1.1 Definitie** Een *reguliere (of regelmatige)  $n$ -hoek* is een convexe  $n$ -hoek waarvan alle zijden even lang zijn en alle hoeken even groot.

Merk op dat de voorwaarden voor de zijden en hoeken nodig zijn, want in een ruit zijn alle zijden even lang en in een rechthoek zijn alle hoeken even groot.

OPDRACHT 1 Laat zien dat de hoeken in een reguliere  $n$ -hoek grootte  $\frac{n-2}{n}\pi$  hebben.

**1.2 Propositie** *De punten van een reguliere  $n$ -hoek liggen op een cirkel.*

BEWIJS: De loodrechten op de middelpunten van twee naburige zijden snijden elkaar in een punt. Samen met de hoekpunt tussen de zijden geeft dit een vierhoek en de diagonaal tussen snijpunt en hoekpunt deelt deze vierhoek in twee congruente driehoeken (twee zijden en de rechte hoek gemeenschappelijk). Als de zijden van de  $n$ -hoek lengte  $a$  hebben, geldt voor de afstand  $r$  tussen snijpunt en hoekpunt dat  $\frac{a}{2} = r \cdot \cos(\frac{n-2}{2n}\pi)$ , d.w.z. de afstand hangt (voor vaste  $n$ ) alleen maar van de lengte van de zijden af. Omdat we met de loodrechten om de  $n$ -hoek rond kunnen lopen, volgt dat alle loodrechten een gezamenlijk snijpunt hebben, dit is het middelpunt van de cirkel waarop alle hoekpunten liggen.  $\square$

Er zijn ook andere mogelijkheden om een reguliere  $n$ -hoek te definiëren, bijvoorbeeld:

- (1) Een convexe  $n$ -hoek is regulier als hij invariant is onder een rotatie rond zijn zwaartepunt om de hoek  $\frac{2\pi}{n}$ .
- (2) Een convexe  $n$ -hoek met even lange zijden is regulier als voor elke hoekpunt  $X$  de hoekpunten die met  $X$  verbonden zijn dezelfde afstand van elkaar hebben.

OPDRACHT 2 Ga na dat de definities (1) en (2) equivalent met de boven aangegeven definitie van reguliere  $n$ -hoeken zijn.

In elk geval is een reguliere veelhoek eenduidig beschreven door het aantal hoekpunten, en voor een reguliere  $n$ -hoek schrijven we het symbool  $\{n\}$ .

## 1.2 Reguliere veelvlakken

We hebben gezien dat er zelfs voor zo'n goede bekende als een reguliere  $n$ -hoek verschillende mogelijkheden van een zuivere wiskundige definitie bestaat. Gelukkig is het wel zo dat alle deze definities equivalent zijn.

We zullen nu een definitie voor een regulier (of regelmatig) veelvlak geven. Intuïtief zouden we eisen dat alle zijvlakken, ribben en hoekpunten van het veelvlak er *hetzelfde uit zien*. Om dit te bereiken zijn er weer een aantal verschillende (gebruikelijke) definities en we zullen er één van kiezen die we later makkelijk naar hogere dimensies kunnen veralgemenen.

**1.3 Definitie** Een convex veelvlak  $P$  heet *regulier* als alle zijvlakken congruente reguliere  $p$ -hoeken zijn en de hoekpunten die met een hoekpunt door een ribbe verbonden zijn congruente reguliere  $q$ -hoeken vormen.

Om de spreekwijze iets te vereenvoudigen, noemen we het convexe omhulsel van de hoekpunten die met een vaste hoekpunt  $X$  door een ribbe verbonden zijn de *link* van  $X$ . De grap bij de definitie van regulariteit is dat de punten van de link überhaupt in een vlak liggen. In het algemeen is dat namelijk niet het geval, kijk bijvoorbeeld naar een drie- of vijfzijdige dubbelpiramide.

Een regulier veelvlak dat aan deze definitie voldoet noteren we met het *Schläfli symbool*  $\{p, q\}$ . Merk op dat bij een regulier veelvlak met symbool  $\{p, q\}$  in elke hoekpunt  $q$  reguliere  $p$ -hoeken samenkomen. Daarom is een regulier veelvlak door zijn symbool (tot op een schaling na) eenduidig vastgelegd.

De definitie via de link lijkt misschien een beetje kunstmatig, daarom laten we even zien dat dit equivalent met een natuurlijker lijkende voorwaarde is. Hiervoor hebben we de *diëderhoek* tussen twee naburige zijvlakken nodig. Dat is de hoek tussen twee lijnen die in de twee zijvlakken liggen en loodrecht op de ribbe tussen de zijvlakken zijn.

**1.4 Stelling** Een convex veelvlak is *regulier dan en slechts dan als alle zijvlakken congruente reguliere  $p$ -hoeken zijn en alle diëderhoeken tussen naburige zijvlakken gelijk zijn*.

BEWIJS:  $\Rightarrow$ : Zij  $X_0$  het middelpunt van de link van  $X$ . Omdat de link een reguliere  $q$ -hoek is, hebben alle hoekpunten in de link dezelfde afstand van  $X_0$ . Aan de andere kant zijn alle zijvlakken congruent en regulier, daarom hebben de hoekpunten in de link ook alle dezelfde afstand van  $X$ . Maar dit betekent dat de driehoeken  $XX_0Y$  voor alle  $Y$  in de link van  $Y$  congruent zijn en dus door een rotatie rond de as  $XX_0$  op elkaar afgebeeld worden. Hieruit volgt dat de hele piramide met de link als basis en  $X$  als punt door een rotatie om de hoek  $\frac{2\pi}{q}$  op zich zelf afgebeeld wordt, en dus zijn in het bijzonder de diëderhoeken tussen de zijvlakken rond  $X$  alle hetzelfde. Door dit argument op de hoekpunten in de link van  $X$  toe te passen en dit proces te herhalen, volgt dat alle diëderhoeken hetzelfde zijn.

$\Leftarrow$ : De loodrechten in de middelpunten van twee naburige zijvlakken snijden elkaar in een punt die afstand  $a \tan \frac{\varphi}{2}$  van de middelpunten heeft, waarbij  $\varphi$  de diëderhoek tussen de zijvlakken is en  $a$  de afstand van de middelpunten van de

zijvlakken van de ribbe. Door alle paren van naburige zijvlakken te bekijken zien we dat alle loodrechten van de zijvlakken zich in een enkele punt  $M$  snijden, dit noemen we het middelpunt van  $P$ . Laten nu  $Y_1$  en  $Y_2$  twee naburige punten in de link van  $X$  zijn, dan zijn de driehoeken  $XY_1M$  en  $XY_2M$  congruent en hebben de gemeenschappelijke zijde  $XM$ , ze worden dus door een rotatie rond  $XM$  op elkaar afgebeeld. Maar de hoek tussen  $XY_1$  en  $XY_2$  is een hoek van de zijvlakken, dus is deze hoek voor alle paren  $Y_1, Y_2$  hetzelfde en dus zijn ook de afstanden tussen  $Y_1$  en  $Y_2$  voor alle paren  $Y_1, Y_2$  hetzelfde. Hieruit volgt dat de link een reguliere veelhoek is.  $\square$

We hebben in het bewijs gezien, dat in een regulier veelvlak de hoekpunten alle op een bol liggen, analoog met het feit dat in een reguliere veelhoek alle hoekpunten op een cirkel liggen. Ook deze eigenschap kan men in plaats van de diëderhoeken voor de definitie van reguliere veelvlakken gebruiken.

**1.5 Stelling** Voor een regulier veelvlak met Schläfli symbool  $\{p, q\}$  geldt

$$q \frac{p-2}{p} \pi < 2\pi.$$

In het bijzonder geven de Schläfli symbolen  $\{3, 3\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{3, 5\}$ ,  $\{4, 3\}$  en  $\{5, 3\}$  de enige mogelijkheden voor reguliere veelvlakken aan.

BEWIJS: De hoek van een reguliere  $p$ -hoek is  $\frac{p-2}{p} \pi$  en in een hoekpunt van een regulier veelvlak met symbool  $\{p, q\}$  komen  $q$  reguliere  $p$ -hoeken samen. Maar om een gesloten veelvlak te krijgen, moet de som van deze hoeken kleiner zijn dan de hoek van een volle cirkel, dus kleiner dan  $2\pi$  (bij gelijkheid krijgen we een plat veelvlak). Hieruit volgt  $q \frac{p-2}{p} \pi < 2\pi$  of te wel  $q \frac{p-2}{p} < 2$ . Dit kunnen we nog iets anders schrijven. Er geldt

$$q \frac{p-2}{p} < 2 \Leftrightarrow q - \frac{2q}{p} < 2 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{p} < \frac{2}{q} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}.$$

Het is duidelijk dat  $p, q \geq 3$ , anders krijgen we geen veelvlak. Maar uit  $p \geq 3$  volgt  $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{3}$  en dus  $\frac{1}{q} > \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ , dus  $q \leq 5$ . We hoeven dus alleen maar de paren  $(p, q)$  met  $3 \leq p, q \leq 5$  te bekijken. Omdat  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  moet zelfs een van  $p$  en  $q$  gelijk aan 3 zijn, dus zijn  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 3)$  en  $(5, 3)$  de enige mogelijkheden voor  $(p, q)$ .  $\square$

**1.6 Opmerking** Als in de vorige stelling gelijkheid geldt, dus  $q \frac{p-2}{p} \pi = 2\pi$ , dan hebben we het met een ontaard - namelijk plat - veelvlak te maken. In dit geval krijgen we een *reguliere vlakvulling*. De mogelijke reguliere vlakvullingen hebben Schläfli symbolen  $\{3, 6\}$ ,  $\{4, 4\}$  en  $\{6, 3\}$ .

OPDRACHT 3 Ga na hoe de reguliere vlakvullingen er uit zien.

### 1.3 Realisatie van de platonische lichamen

We hebben in stelling 1.5 bewezen dat er hoogstens 5 reguliere veelvlakken bestaan. We moeten nu nog nagaan of voor elk van de mogelijke Schläfli symbolen daadwerkelijk ook een regulier veelvlak bestaat. Dat dit inderdaad het geval is, is helemaal niet vanzelfsprekend, we hebben gewoon voorwaarden gevonden die zo sterk zijn dat ze alleen maar de mogelijkheden over laten die ook echt bestaan. Omdat de realisaties al door de oude Grieken gevonden werden, worden de reguliere veelvlakken meestal *platonische lichamen* genoemd. Merk op dat in die tijden het concept van een zuivere wiskundige definitie en een zuiver wiskundig bewijs niet zo duidelijk waren.

We zullen twee manieren bekijken, hoe de existentie van de platonische lichamen bewezen kan worden, de eerste geeft meetkundige constructies en de tweede geeft gewoon de coördinaten van de hoekpunten in de 3-dimensionale ruimte. In elk geval moet er dan aangetoond worden dat het zo geconstrueerde veelvlak aan de definitie van een regulier veelvlak voldoet.

#### 1.3.1 Meetkundige constructies

Als het Schläfli symbool  $\{p, q\}$  van een regulier veelvlak gegeven is, hebben we eigenlijk helemaal geen keuze meer hoe we zo'n veelvlak moeten construeren, want de zijvlakken zijn alle reguliere  $p$ -hoeken en rond een hoekpunt moeten  $q$  van deze  $p$ -hoeken samenkomen zo dat de diëderhoeken hetzelfde zijn. We moeten alleen maar laten zien dat de stukken die we zo rond een hoekpunt krijgen ook samen passen. Hierbij zullen we gebruik maken van bekende constructies zo als piramiden, prisma's en antiprisma's.

#### 1.7 Definitie

- (i) Een *piramide* heeft als grondvlak een (niet noodzakelijk reguliere) veelhoek en als zijvlakken de driehoeken die worden verkregen door de hoekpunten van het grondvlak met de spits van de piramide te verbinden.
- (ii) Een *prisma* heeft als grond- en bovenvlakken congruente veelhoeken die zo in evenredige vlakken liggen, dat de zijvlakken rechthoeken zijn.
- (iii) Een *antiprisma* heeft als grond- en bovenvlakken congruente veelhoeken in evenredige vlakken en als zijvlakken gelijkbenige driehoeken. Grond- en bovenvlak zijn daarbij tegen elkaar gedraaid.

#### De tetraëder $\{3, 3\}$

We nemen een gelijkzijdige driehoek als grondvlak van een drizijdige piramide en kiezen de spits van de piramide zo dat hij loodrecht boven het zwaartepunt van het grondvlak staat. Dan zijn de zijvlakken congruente gelijkbenige driehoeken maar we kunnen de hoogte van de piramide natuurlijk zo kiezen, dat de zijvlakken gelijkzijdig worden. Het is nu makkelijk om in te zien dat de piramide inderdaad een regulier veelvlak is.

### De kubus (hexaëder) $\{4, 3\}$

Natuurlijk kan iedereen een kubus construeren. Een kubus is een voorbeeld van een prisma, waarbij de grond- en bovenvlakken vierkanten zijn. In het algemeen zijn de zijkanten van een prisma rechthoeken, maar we kunnen de hoogte natuurlijk zo kiezen dat dit ook vierkanten zijn. Dan zijn de zijvlakken alle congruent en de diëderhoeken zijn alle gelijk, namelijk rechte hoeken.

### De octaëder $\{3, 4\}$

Voor een veelvlak waarbij in elk hoekpunt 4 congruente gelijkzijdige driehoeken samenkomen, zijn er twee voor de hand liggende constructies. We kunnen twee regelmatige piramiden met een vierkant als grondvlak nemen en deze aan de vierkanten aan elkaar plakken. Of we maken een antiprisma door twee gelijkzijdige driehoeken om 60 graden tegen elkaar te draaien en de hoogte zo te bepalen dat de zijvlakken gelijkzijdig worden.

In elk geval krijgen we een veelvlak met congruente reguliere zijvlakken, maar we moeten nog nagaan dat alle diëderhoeken hetzelfde zijn. Dit zou je waarschijnlijk voor de constructie als dubbelpiramide makkelijker vinden.

OPDRACHT 4 Laat zien dat de diëderhoeken van een als dubbelpiramide geconstrueerde octaëder alle gelijk zijn. Dit is makkelijk voor de hoeken tussen de zijvlakken rond de spitsen van de twee enkele piramiden, het punt is dat ook de hoek waar de twee piramiden samengeplakt zijn hetzelfde moet zijn.

### De icosäeder $\{3, 5\}$

Ook voor een veelvlak met 5 congruente gelijkzijdige driehoeken rond een hoekpunt zijn er verschillende constructies. Bij de eerste maken we eerst een antiprisma met als grond- en bovenvlak reguliere vijfhoeken, die tegen elkaar gedraaid zijn. Als we de hoogte van het antiprisma passend kiezen, vormen de zijvlakken een ring van 10 gelijkzijdige driehoeken. Op het grond- en bovenvlak plakken we nu telkens een vijfzijdige regelmatige piramide, begrensd door gelijkzijdige driehoeken congruent met de zijvlakken. Het zo verkregen veelvlak is begrensd door 20 congruente gelijkzijdige driehoeken, maar het nagaan dat de diëderhoeken alle hetzelfde zijn is enigszins moeizaam.

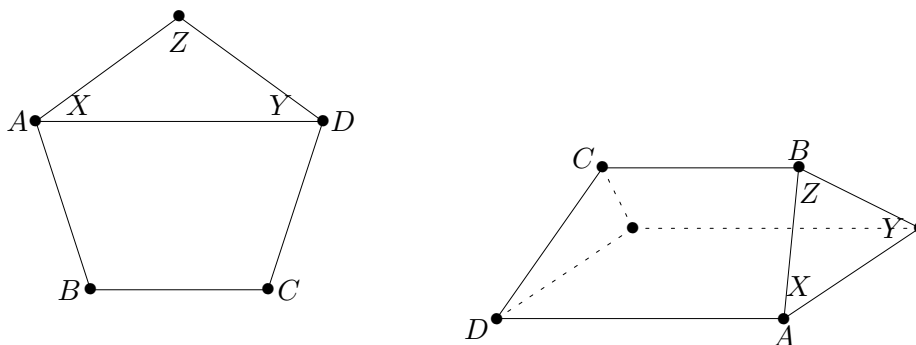
De tweede constructie lijkt een beetje uit de lucht te vallen, maar je zult bijvoorbeeld in het college *Symmetrie* een motivatie hiervoor zien. Een *gouden rechthoek* is een rechthoek met een verhouding van  $1 : \tau$  voor de zijden, waarbij  $\tau := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  de *gouden snede* is. We combineren drie congruente gouden rechthoeken zo dat ze telkens loodrecht op elkaar staan en een gemeenschappelijk middelpunt hebben. De 12 hoekpunten van de drie rechthoeken vormen dan de hoekpunten van een regulier veelvlak.

### De dodecaëder $\{5, 3\}$

Dit is het enige van de vijf mogelijke gevallen, dat we niet makkelijk uit piramides, prisma's en antiprisma's kunnen construeren. Eén mogelijkheid is natuurlijk, gewoon te proberen wat er gebeurt als we 3 reguliere vijfhoeken in

een hoekpunt samenplakken. Als we met een vijfhoek als grondvlak beginnen en aan de ribben van dit vijfhoek 5 andere reguliere vijfhoeken vastplakken, zo dat deze samen stoten, krijgen we een soort schaal uit zes vijfhoeken. Nu bouwen we een tweede schaal van deze soort en zien dat de twee mooi aan elkaar passen en we zo een veelvlak begrensd door 12 vijfhoeken krijgen. Voor een zuiver bewijs dat dit inderdaad een regulier veelvlak is, moeten we echter *aantonen* dat de twee schalen echt samen passen en dat alle diëderhoeken hetzelfde zijn.

Een tweede constructie van de dodecaëder lijkt enigszins wonderbaarlijk. We beginnen met een kubus en plakken op elk zijvlak van de kubus een dak vast dat uit twee driehoeken en twee trapeziums bestaat. Het is mogelijk de afmetingen van zo'n dak zo te kiezen, dat een driehoek van een dak samen met een trapezium van een andere dak een plat regulier vijfhoek vormt. De passende delen voor het dak krijgen we door reguliere vijfhoeken (geen verrassing) langs een diagonaal op te knippen, zo als in het plaatje hieronder te zien.



Figuur 1: Constructie van de daken om uit een kubus een dodecaëder te bouwen

Merk op dat we op deze manier alleen maar hoeven te bewijzen dat de driehoeken en trapeziums inderdaad in een vlak liggen (coplanaar zijn) en er geen knik tussen is. Uit de constructie volgt dan dat de begrenzende vijfhoeken regulier zijn en uit de symmetrie van de kubus volgt dat de diëderhoeken alle gelijk zijn.

OPDRACHT 5 Bouw zelf een dodecaëder door passende daken op een kubus te plakken.

Een verdere constructie van de dodecaëder krijgen we door de middelpunten van de zijvlakken van een icosaeëder als hoekpunten van een veelvlak te kiezen. Uit de symmetrieeigenschappen van de icosaeëder volgt dat dit een regulier veelvlak geeft, begrensd door reguliere vijfhoeken, waarvan in elke hoekpunt 3 samenkomen. Dit is een voorbeeld van een algemene constructiemethode, die men *dualisering* noemt. We zullen hier later op terug komen.

### 1.3.2 Beschrijving door coördinaten

#### De tetraëder $\{3, 3\}$

Uit de constructie zijn de coördinaten van een tetraëder in principe snel te bepalen. Men krijgt bijzonder eenvoudige coördinaten als men als men de

spits van de tetraëder niet op een van de standaardcoördinatenassen maar op de lijn  $x = y = z$  kiest. Dan krijgt men de hoekpunten:  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, -1)$ ,  $(-1, 1, -1)$  en  $(-1, -1, 1)$ . Men gaat eenvoudig na dat elk paar van deze punten afstand  $\sqrt{8}$  heeft.

### De kubus $\{4, 3\}$

De coördinaten van de hoekpunten van een kubus zijn natuurlijk duidelijk, het zijn de 8 punten van de vorm  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . De zijvlakken zijn de vier punten die één coördinaat gemeenschappelijk hebben.

### De octaëder $\{3, 4\}$

Ook de coördinaten van de octaëder zijn heel eenvoudig, we krijgen namelijk een octaëder door de eenheidsvectoren en hun tegengestelden te verbinden, dus zijn de hoekpunten  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$  en  $(0, 0, \pm 1)$ .

### De icsaëder $\{3, 5\}$

Uit de constructie van de icsaëder uit drie loodrecht op elkaar staande gouden rechthoeken kunnen we concluderen dat  $(\pm\tau, \pm 1, 0)$ ,  $(\pm 1, 0, \pm\tau)$  en  $(0, \pm\tau, \pm 1)$  de coördinaten van de hoekpunten zijn.

### De dodecaëder $\{5, 3\}$

Als we de dodecaëder construeren door daken op de zes zijvlakken van een kubus te plakken, krijgen we de hoekpunten van de kubus natuurlijk ook weer als hoekpunten, dus hebben we al de 8 hoekpunten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  gevonden. Als we nu de afmetingen van de daken na gaan, zien we dat de andere hoekpunten de coördinaten  $(0, \pm\tau^{-1}, \pm\tau)$ ,  $(\pm\tau, 0, \pm\tau^{-1})$  en  $(\pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0)$  hebben.

## OPGAVEN

1. Bepaal de oppervlakte van een reguliere  $n$ -hoek waarvan de hoekpunten op een cirkel van straal 1 liggen. Vanaf welke  $n$  is deze oppervlakte meer dan 99% van de oppervlakte van de cirkel?
2. Een tegeling van het 2-dimensionale vlak met reguliere veelhoeken (die verschillende aantallen hoeken mogen hebben) heet een *half-reguliere vlakvulling* als alle hoekpunten congruent zijn. Hierbij noemen we twee hoekpunten congruent als ze door dezelfde types  $n$ -hoeken in dezelfde volgorde omringd zijn.

Bepaal alle half-reguliere vlakvullingen.

3. Niet alle convexe veelvlakken die door congruente gelijkzijdige driehoeken begrensd zijn, zijn regulier (zo als tetraëder, octaëder en icsaëder). Deze veelvlakken heten *deltaveelvlakken*.

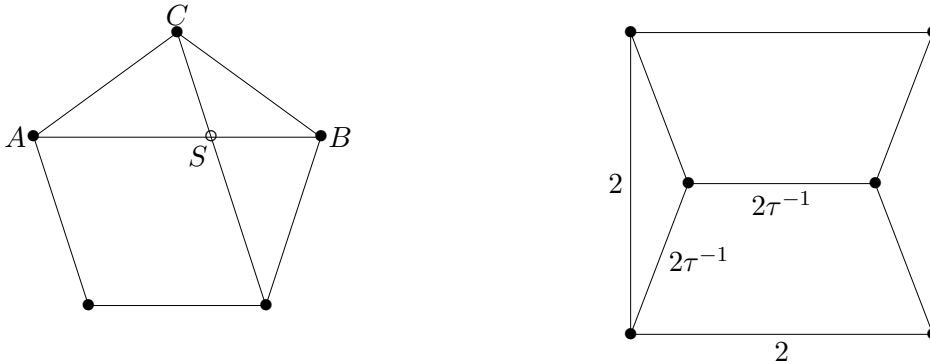
Probeer alle deltaveelvlakken te vinden (het zijn er 5 behalve de reguliere).

4. Zij  $\tau := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$  de gouden snede.

(i) Ga na dat  $\tau^2 = \tau + 1$  en  $\tau^{-1} = \tau - 1$ .



- (ii) Bewijs dat in een reguliere vijfhoek met zijde 1 de diagonalen lengte  $\tau$  hebben. Bekijk hiervoor de linker schets hieronder: De driehoeken  $ABC$  en  $BCS$  zijn gelijkbenig omdat de vijfhoek regulier is. Verder zijn deze twee driehoeken gelijkvormig omdat ze (bij  $B$ ) een gemeenschappelijke hoek hebben. Concludeer dat ook de driehoek  $SCA$  gelijkbenig is en bereken hieruit de lengtes van de stukken  $AS$  en  $SB$ .
- (iii) Voor de constructie van een dodecaëder plakken we op elk van de zijden van een kubus met hoekpunten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  daken vast, die we telkens uit de delen van twee reguliere vijfhoeken construeren. Hiervoor knippen we de vijfhoeken langs een diagonaal in twee stukken, zo dat we een trapezium en een driehoek krijgen. Twee van deze trapeziums plakken we langs de korte evenredige zijde aan elkaar en voegen de driehoeken in (zie de rechter schets hieronder). Omdat de kubus zijden van lengte 2 heeft, hebben we volgens (ii) reguliere vijfhoeken van zijde  $2\tau^{-1}$  nodig. Laat zien dat de daken die we uit de delen van de vijfhoeken bouwen hoogte  $\tau - 1$  hebben. Hiervoor is misschien de rechter schets hieronder (die zo'n dak van boven toont) en de stelling van Pythagoras handig.



- (iv) We moeten de daken zo op de zijden van de kubus plakken dat de lange zijde van een driehoek van één dak aan de lange zijde van een trapezium van een naburig dak stoot. We moeten nu nog aantonen dat de zo samenkomende driehoeken en trapeziums *platte* vijfhoeken vormen. Uit (iii) volgt dat een van de trapeziums van het dak op het bovenvlak de coördinaten  $(-\tau^{-1}, 0, \tau)$ ,  $(\tau^{-1}, 0, \tau)$ ,  $(-1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$  heeft. De hier in de laatste twee punten aan vastgeplakte driehoek heeft als derde hoekpunt het punt  $(0, \tau, \tau^{-1})$ . Ga dit na en laat zien dat deze vijf punten inderdaad in een 2-dimensionaal vlak liggen.
- (v) Bouw zelf een dodecaëder.

## 2 Veralgemening van Platonische lichamen naar hogere dimensies

We zullen in dit hoofdstuk kijken hoe we de definities van reguliere veelhoeken en veelvlakken op hogere dimensies kunnen uitbreiden. Tot nog toe hebben we redelijk intuïtief begrippen zo als *hoekpunten*, *zijvlakken* en *begrensd door* kunnen gebruiken. Om hier ook in hogere dimensies nog over te kunnen praten, moeten we zuivere definities voor sommige begrippen geven. Natuurlijk gebruiken we hierbij als leidraad onze ideeën uit het 2- en 3-dimensionale geval.

### 2.1 Beschrijving van polytopen door hypervlakken

We hebben gezien dat veelhoeken begrensd zijn door stukken van lijnen en veelvlakken begrensd zijn door veelhoeken, dus door eindige stukken van 2-dimensionale vlakken. Als we nu naar de 4-dimensionale ruimte gaan, lijkt het voor de hand liggend dat een *polytoop* (klinkt beter dan *veellichaam*) begrensd is door veelvlakken, dus door eindige stukken van 3-dimensionale ruimtes. Maar hoe moeten we ons dit voorstellen? En wat heet nu *begrensd zijn*?

Om hier een idee voor te krijgen, gaan we eerst nog eens naar het 2-dimensionale geval terug.

Een veelhoek is begrensd door lijnstukken en voor elke lijn kunnen we een *normaalvector* kiezen die loodrecht op de lijn staat en de lijn is gegeven door de punten die een vast inproduct met de normaalvector hebben. Als  $v := \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}$  een normaalvector en  $a \in \mathbb{R}$  is, dan is de lijn loodrecht op  $v$  met inproduct  $a$  met  $v$  gegeven door de punten  $w := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  met  $(v, w) := c_x \cdot x + c_y \cdot y = a$ . Het is duidelijk dat dit een lineaire vergelijking is en we krijgen een lijn dus als oplossing van een enkele lineaire vergelijking in twee onbekenden. Als de normaalvector niet de nulvector is, zien we meteen dat de oplossingen van het homogene 'stelsel' vergelijkingen een 1-dimensionale deelruimte vormen en de oplossingen van de echte vergelijking zijn de verschuiving van deze deelruimte om een particuliere oplossing.

Een lijn  $L$  gedefinieerd door  $L := \{w \in \mathbb{R}^2 \mid (v, w) = a\}$  deelt het 2-dimensionale vlak in de twee halfvlakken gegeven door  $H^+ := \{w \in \mathbb{R}^2 \mid (v, w) \geq a\}$  en  $H^- := \{w \in \mathbb{R}^2 \mid (v, w) \leq a\}$ , waarbij de lijn zelf de doorsnede  $H^+ \cap H^-$  is. Het is nu een redelijk triviale maar belangrijke opmerking, dat een veelhoek voor een lijn door één van zijn zijden volledig in een van de twee halfvlakken ligt die door deze lijn gedefinieerd worden. Als we dit voor alle zijden van de veelhoek bekijken, zien we dat een veelhoek de doorsnede van eindig veel halfvlakken is.

We spreken nu af dat we de normaalvector van een zijde van een veelhoek altijd zo oriënteren dat hij naar buiten wijst, dan ligt de veelhoek dus in het halfvlak  $H^-$ . We krijgen zo de volgende abstracte definitie van een veelhoek:

**2.1 Definitie** Een veelhoek  $P$  is gedefinieerd als de doorsnede van eindig veel halfvlakken  $H_1, \dots, H_r$  als deze doorsnede eindig is.

Als het halfvlak  $H_i$  gedefinieerd is door de normaalvector  $v_i$  en het inproduct  $a_i$ , dan is  $P$  gegeven door

$$P = \{w \in \mathbb{R}^2 \mid (v_i, w) \leq a_i \text{ voor alle } 1 \leq i \leq r\}.$$

De begrippen die we in het 2-dimensionale geval hebben ontwikkeld, kunnen we nu aan het 3-dimensionale geval toetsen.

Ook de zijvlakken van een veelvlak kunnen we beschrijven door een normaalvector en een inproduct, ze liggen namelijk in een 2-dimensionaal vlak dat we als oplossing van één lineaire vergelijking vinden. Merk op dat de oplossingen van een niet-triviaal homogeen stelsel met één vergelijking en drie onbekenden een 2-dimensionale deelruimte vormen en de oplossingen van de originele vergelijking zijn de verschuiving van deze deelruimte om een particuliere oplossing.

Een 2-dimensionaal vlak deelt de 3-dimensionale ruimte in twee halfruimtes en we zien weer dat een veelvlak in een van de twee halfruimtes gedefinieerd door een van zijn zijvlakken ligt. Een veelvlak is dus de doorsnede van eindig veel halfruimtes (als deze doorsnede eindig is). We kunnen dus de definitie van een veelhoek letterlijk overnemen als definitie van een veelvlak als we  $\mathbb{R}^2$  door  $\mathbb{R}^3$  vervangen:

**2.2 Definitie** Een veelvlak  $P$  is gedefinieerd als de doorsnede van eindig veel halfruimtes  $H_1, \dots, H_r$  als deze doorsnede eindig is.

Als de halfruimte  $H_i$  gedefinieerd is door de normaalvector  $v_i$  en het inproduct  $a_i$ , dan is  $P$  gegeven door

$$P = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid (v_i, w) \leq a_i \text{ voor alle } 1 \leq i \leq r\}.$$

Omdat we een veelvlak nu alleen maar met behulp van zijn zijvlakken gedefinieerd hebben, moeten we nog iets over de ribben en hoekpunten zeggen. Een ribbe is de doorsnede van twee zijvlakken, en omdat een zijvlak in de verzameling van oplossingen van één lineaire vergelijking ligt, vinden we de ribben als oplossingen van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen. Natuurlijk heeft zo'n stelsel in het algemeen een lijn als oplossing, maar we moeten deze lijn ook nog met de andere halfruimtes snijden, en dit levert of een lijnstuk of de lege verzameling, namelijk als we twee zijvlakken nemen die geen ribbe gemeenschappelijk hebben.

Op een analoge manier zien we, dat we de hoekpunten vinden als doorsnede van minstens drie van de definiërende 2-dimensionale vlakken.

**Voorbeeld 1:** De tetraëder

Als we bij een tetraëder de som van drie van de hoekpunten nemen, dan staat (uit symmetrieredenen) de resulterende vector loodrecht op de driehoek die deze hoekpunten bevat. Uit de coördinaten  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, -1, -1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ ,  $(-1, -1, 1)$  van de hoekpunten (die we als bekend veronderstellen) vinden we zo makkelijk de normaalvectoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

die natuurlijk precies de tegengestelden van de hoekpunten zijn. Omdat we willen, dat het hoekpunt  $(1, 1, 1)$  op de zijvlakken met normaalvectoren  $v_2$ ,  $v_3$  en  $v_4$  ligt, moeten we de inproducten  $a_2 = a_3 = a_4 = 1$  kiezen. Met elk van de andere hoekpunten volgt dat ook  $a_1 = 1$  is. De tetraëder is dus gedefinieerd door:

$$T := \{w \in \mathbb{R}^3 \mid (v_i, w) \leq 1 \text{ voor } 1 \leq i \leq 4\}.$$

Om nu bijvoorbeeld de ribbe tussen de zijvlakken met normaalvectoren  $v_1$  en  $v_2$  te vinden, moeten we eerst een klein stelsel lineaire vergelijkingen oplossen, namelijk  $(v_1, w) = 1$  en  $(v_2, w) = 1$ . De oplossing van dit stelsel is de lijn

$$L := \left\{ w = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Maar voor een punt  $w$  die op de doorsnede van de lijn  $L$  met de tetraëder  $T$  ligt, moet ook gelden dat  $(v_3, w) \leq 1$  en  $(v_4, w) \leq 1$ . Er geldt  $(v_3, w) = -1 - 2\lambda$  en  $(v_4, w) = -1 + 2\lambda$ , dus volgt  $\lambda \geq -1$  en  $\lambda \leq 1$ . De ribbe zit dus tussen de punten  $(-1, -1, 1)$  en  $(-1, 1, -1)$ , en dit zijn gelukkig twee van de originele hoekpunten.

**Voorbeeld 2:** De octaëder

Ook bij de octaëder kunnen we de normaalvectoren makkelijk aangeven, omdat de hoekpunten zo eenvoudige coördinaten hebben. De acht zijvlakken van de octaëder krijgen we als we uit elk van de drie paren  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$ ,  $(0, 0, \pm 1)$  telkens een van de twee hoekpunten kiezen. Als we weer de hoekpunten bij elkaar optellen, krijgen we de normaalvectoren

$$v_{1,\dots,8} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dit zijn inderdaad de hoekpunten van een kubus, en men noemt daarom de octaëder ook het *duale* veelvlak van de kubus. We zien ook hier snel in dat de inproducten alle 1 moeten zijn, dus is de octaëder gedefinieerd door

$$O := \{w \in \mathbb{R}^3 \mid (v_i, w) \leq 1 \text{ voor } 1 \leq i \leq 8\}$$

voor deze normaalvectoren  $v_1, \dots, v_8$ .

We proberen nu eens de ribbe tussen de zijvlakken met normaalvectoren  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  te vinden. Als oplossing van het stelsel vergelijkingen  $(v_1, w) = 1$  en  $(v_3, w) = 1$  vinden we de lijn

$$L := \left\{ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

We moeten nu weer de doorsnede van de lijn  $L$  met de octaëder  $O$  bepalen, hiervoor moeten we de inproducten van een punt  $w \in L$  met de resterende normaalvectoren berekenen. Er geldt  $(v_2, w) = 1 + 2\lambda$ ,  $(v_4, w) = 1 - 2\lambda$ ,

$(v_5, w) = -1$ ,  $(v_6, w) = -1 + 2\lambda$ ,  $(v_7, w) = -1$  en  $(v_8, w) = -1 - 2\lambda$ . Maar uit  $(v_2, w) \leq 1$  volgt  $\lambda \leq 0$  en uit  $(v_4, w) \leq 1$  volgt  $\lambda \geq 0$ , dus krijgen we als doorsnede van  $L$  met de octaëder geen ribbe maar slechts een punt en dit toont aan dat de twee zijvlakken helemaal geen ribbe gemeenschappelijk hebben, maar slechts een van de hoekpunten.

OPDRACHT 6 Beschrijf de kubus, icoesaëder en dodecaëder door normaalvectoren van hun zijvlakken. Toon aan dat de normaalvectoren van de icoesaëder de hoekpunten van een dodecaëder vormen als alle inproducten hetzelfde gekozen worden. Daarom zijn ook de icoesaëder en de dodecaëder duale veelvlakken.

We zijn nu klaar, om polytopen in de  $n$ -dimensionale ruimte te definiëren. Het idee is, dat een polytoop begrensd is door polytopen van dimensie  $n - 1$  die beschreven worden door normaalvectoren en inproducten.

**2.3 Definitie** Een *hypervlak* in de  $n$ -dimensionale ruimte  $\mathbb{R}^n$  is de oplossing van een lineaire vergelijking

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = a \text{ waarbij } 0 \neq v := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ en } a \in \mathbb{R}.$$

Een hypervlak  $Y$  is dus van de vorm  $Y = w_0 + U$ , waarbij  $w_0$  een particuliere oplossing van de vergelijking en  $U$  de  $(n - 1)$ -dimensionale deelruimte van oplossingen met rechterzijde 0 (het bijhorende homogene stelsel) is. We noemen  $v$  de *normaalvector* van het hypervlak en kunnen  $Y$  met behulp van het inproduct korter aangeven als  $Y := \{w \in \mathbb{R}^n \mid (v, w) = a\}$ . De deelruimte  $U$  is dan precies de deelruimte die loodrecht op de normaalvector staat, dus inproduct 0 met  $v$  heeft.

Een hypervlak  $Y$  deelt de  $n$ -dimensionale ruimte  $\mathbb{R}^n$  in twee *halfruimtes*, namelijk  $H^+ := \{w \in \mathbb{R}^n \mid (v, w) \geq a\}$  en  $H^- := \{w \in \mathbb{R}^n \mid (v, w) \leq a\}$ , waarbij  $H^-$  de nulvector bevat.

Met deze begrippen kunnen we nu de definitie van veelvlakken makkelijk op hogere dimensies veralgemenen.

**2.4 Definitie** Een  $n$ -dimensionale *polytoop*  $P$  is gedefinieerd als de doorsnede van eindig veel halfruimtes  $H_1, \dots, H_r$  in  $\mathbb{R}^n$  als deze doorsnede eindig is.

Als de halfruimte  $H_i$  gedefinieerd is door de normaalvector  $v_i \in \mathbb{R}^n$  en het inproduct  $a_i$ , dan is  $P$  gegeven door

$$P = \{w \in \mathbb{R}^n \mid (v_i, w) \leq a_i \text{ voor alle } 1 \leq i \leq r\}.$$

De doorsnede van een polytoop met een van zijn definiërende hypervlakken noemen we een *cel* van de polytoop.

Bij een 2-dimensionale polytoop (of veelhoek) zijn de cellen gewoon de zijden, bij een 3-dimensionale polytoop (een veelvlak) zijn de cellen de zijvlakken. Bij een 4-dimensionale polytoop zijn cellen eindige stukken van verschuivingen van 3-dimensionale deelruimtes (de hypervlakken). Maar de cellen zijn begrensd door de doorsneden met andere hypervlakken, en zo'n doorsnede is gewoon een veelhoek. De cellen zijn dus begrensd door veelhoeken en zijn dus gewoon veelvlakken.

Op een analoge manier zien we in dat de cellen van een  $n$ -dimensionale polytoop gewoon  $(n - 1)$ -dimensionale polytopen zijn.

Onze beschrijving van  $n$ -dimensionale polytopen met behulp van halfruimtes, normaalvectoren en inproducten heeft verschillende voordelen, waar we hier al eens twee van kunnen noemen:

- Elke halfruimte  $H$  is convex, want als  $H$  gegeven is door de ongelijkheid  $H := \{w \in \mathbb{R}^n \mid (v, w) \leq a\}$ , dan volgt voor  $w_1, w_2 \in H$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  dat  $(v, (1 - \lambda)w_1 + \lambda w_2) = (1 - \lambda)(v, w_1) + \lambda(v, w_2) \leq (1 - \lambda)a + \lambda a \leq a$ , dus  $(1 - \lambda)w_1 + \lambda w_2 \in H$ . Maar de doorsnede van twee convexe verzamelingen is weer convex (ga dit na), dus zijn de  $n$ -dimensionale polytopen met deze definitie automatisch convex.
- We kunnen met behulp van de normaalvectoren de hoek tussen twee hypervlakken of cellen definiëren: De twee normaalvectoren spannen een 2-dimensionaal veld op, dat met elk van de hypervlakken een lijn als doorsnede heeft. De hoek tussen deze lijnen definiëren we nu als hoek tussen de hypervlakken. Maar de hoek tussen deze lijnen geeft samen met de hoek tussen de normaalvectoren een hoek van 180 graden, dus krijgen we de hoek  $\alpha$  tussen twee hypervlakken als  $\alpha = \pi - \beta$  als  $\beta$  de hoek tussen de normaalvectoren is.

## 2.2 De link van een hoekpunt

Een hoekpunt van een  $n$ -dimensionale polytoop is de doorsnede van  $n$  van zijn definiërende hypervlakken met lineair onafhankelijke normaalvectoren, als dit punt ook in de andere definiërende halfruimtes ligt. Het kan zijn dat een hoekpunt op meer dan  $n$  hypervlakken ligt (denk bijvoorbeeld aan de icosaeëder), maar hij is door  $n$  hypervlakken al vastgelegd.

Twee hoekpunten zijn door een ribbe verbonden als ze op  $n - 1$  gemeenschappelijke hypervlakken met lineair onafhankelijke normaalvectoren liggen. Merk op dat aan de ene kant geen twee hoekpunten op  $n$  gemeenschappelijke hypervlakken met lineair onafhankelijke normaalvectoren kunnen liggen, want de doorsnede van deze hypervlakken legt een eenduidig punt vast. Aan de andere kant is een ribbe een deel van een 1-dimensionale lijn en we moeten  $n - 1$  hypervlakken snijden om een 1-dimensionale doorsnede te krijgen (want een homogeen stelsel lineaire vergelijkingen met  $k$  vergelijkingen en  $n$  onbekenden heeft minstens  $n - k$  vrije parameters).

**2.5 Definitie** Voor een hoekpunt  $X$  van een  $n$ -dimensionale polytoop  $P$  heet het convexe omhulsel van de hoekpunten van  $P$  die door een ribbe met  $X$

verbonden zijn, de *link* van  $X$ .

In het algemeen zou ook de link van een hoekpunt weer een  $n$ -dimensionale polytoop zijn, maar soms liggen de punten van de link in één hypervlak, en dan is de link een  $(n - 1)$ -dimensionale polytoop.

Bij de 3-dimensionale Platonische lichamen hebben we gezien dat de link van een hoekpunt inderdaad steeds een regulier veelhoek is, terwijl dat bij andere veelvlakken niet het geval is. Het feit dat de link in een hypervlak ligt, lijkt dus iets met de regulariteit van de polytoop te maken te hebben.

Om nu een zinvolle definitie van regulariteit voor  $n$ -dimensionale polytopen te geven, moeten we weer de analogie met de bekende dimensies 2 en 3 bemoeien. We zullen zeker eisen dat de cellen alle congruent zijn en het mooiste zou het natuurlijk zijn als de cellen zelfs reguliere  $(n - 1)$ -dimensionale polytopen zijn. Maar dit was zelfs voor de veelvlakken niet genoeg, we hebben hier nog iets over de diëderhoeken moeten eisen en hadden gezien dat dit equivalent is met het feit dat de link van elke hoekpunt een regulier veelhoek is. Daarom lijkt het niet zo gek als we nu eisen dat ook in het algemene geval de link van een hoekpunt een reguliere  $(n - 1)$ -dimensionale polytoop moet zijn.

De definitie van een reguliere  $n$ -dimensionale polytoop luidt aldus:

**2.6 Definitie** Een  $n$ -dimensionale polytoop  $P$  heet *regulier*, als zijn cellen congruente reguliere  $(n - 1)$ -dimensionale polytopen zijn en ook de links van alle hoekpunten congruente reguliere  $(n - 1)$ -dimensionale polytopen zijn.

OPDRACHT 7 Ga na dat de algemene definitie van een reguliere  $n$ -dimensionale polytoop met de vroegere definities van reguliere veelhoeken en veelvlakken overeen komt.

## OPGAVEN

5. We gaan na dat er een 4-dimensionale reguliere polytoop bestaat die Schläfli symbool  $\{4, 3, 3\}$  heeft en die we als 4-dimensionale kubus kunnen beschouwen (en dus *hyperkubus* noemen). Als normaalvectoren kiezen we de vectoren van de standaardbasis in  $\mathbb{R}^4$  en hun negatieven, dus de 8 vectoren

$$v_{1,\dots,8} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Als inproduct kiezen we voor alle vectoren  $a_1 = \dots = a_8 = 1$ . We definiëren nu een polytoop als doorsnede van de halfruimtes  $H_i := \{w \in \mathbb{R}^4 \mid (v_i, w) \leq 1\}$ , dus

$$P := \{w \in \mathbb{R}^4 \mid (v_i, w) \leq 1 \text{ voor alle } 1 \leq i \leq 8\}.$$

- (i) Toon aan dat  $P$  eindig is door te laten zien dat

$$w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow -1 \leq x, y, z, t \leq 1.$$

(ii) Een hoekpunt is de doorsnede van 4 lineair onafhankelijke hypervlakken. Ga na hoe je uit de vectoren  $v_1, \dots, v_8$  vier lineair onafhankelijke vectoren kunt kiezen en concludeer dat  $P$  de 16 hoekpunten  $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$  heeft.

(iii) Twee hoekpunten zijn door een ribbe verbonden als ze op drie gemeenschappelijke hypervlakken liggen. Bewijs dat twee hoekpunten van  $P$  dan en slechts dan door een ribbe verbonden zijn als ze alleen maar in één coördinaat verschillen.

(iv) Uit (iii) volgt dat elke hoekpunt met vier andere hoekpunten door een ribbe verbonden is, dus bestaat de link van een hoekpunt uit vier punten. Ga na dat de link van  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  de hoekpunten  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  bevat.

Je ziet makkelijk in dat deze vier punten in het hypervlak liggen dat door de vergelijking  $x + y + z + t = 2$  gedefinieerd is, dus het hypervlak met normaalvector  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en inproduct 2. Bewijs nu dat de vier punten van de link inderdaad een tetraëder vormen door na te gaan dat ze onderling alle dezelfde afstand hebben. (Een analoog argument werkt voor de link van elke andere hoekpunt.)

(v) Toon aan dat de cel met normaalvector  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  de hoekpunten  $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$  bevat en concludeer dat de cellen van  $P$  gewone 3-dimensionale kubussen zijn. (Ook hier geldt een analoog argument voor de andere cellen.)

(vi) De cellen van de link van een hoekpunt corresponderen met de cellen die in dit hoekpunt samen komen. In ons geval is de link een tetraëder en heeft dus 4 cellen (zijvlakken). Ga na welke vier cellen in het hoekpunt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  samen komen.



## 3 De classificatie van reguliere polytopen

### 3.1 Het Schläfli symbool

We hebben gezien dat we reguliere polytopen in dimensie 2 door één en in dimensie 3 door twee getallen kunnen beschrijven. Voor de reguliere veelvlakken hadden we hiervoor al het *Schläfli symbool*  $\{p, q\}$  gebruikt. Het zou nu geen grote verrassing zijn, dat we  $n$ -dimensionale reguliere polytopen door  $n - 1$  getallen kunnen beschrijven die we in een symbool samenvatten.

**3.1 Definitie** Een reguliere  $n$ -dimensionale polytoop  $P$  heeft het *Schläfli symbool*  $\{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}\}$  als de 2-dimensionale zijvlakken van  $P$  regelmatige  $r_1$ -hoeken zijn en de link van elke hoekpunt van  $P$  een reguliere  $(n-1)$ -dimensionale polytoop met symbool  $\{r_2, \dots, r_{n-1}\}$  is.

De naam van het symbool is ter eer van de switser Ludwig Schläfli, geboren 1814 in Grasswyl en overleden 1895 in Bern.



Figuur 2: Ludwig Schläfli (1814-1895)

De meeste definities van het Schläfli symbool geven aan dat  $P$  een link van type  $\{r_2, \dots, r_{n-1}\}$  en cellen van type  $\{r_1, \dots, r_{n-2}\}$  heeft, maar dan moet nog bewezen worden dat dit een consistente definitie is, want voor  $n \geq 4$  overlappen deze twee symbolen. De volgende propositie beweert dat dit inderdaad het geval is.

**3.2 Propositie** *De cellen van een  $n$ -dimensionale reguliere polytoop  $P$  met Schläfli symbool  $\{r_1, r_2, \dots, r_{n-1}\}$  zijn reguliere polytopen met Schläfli symbool  $\{r_1, r_2, \dots, r_{n-2}\}$ .*

**BEWIJS:** De cruciale opmerking is dat de link van een cel die een hoekpunt  $X$  bevat een cel van de link van  $X$  is. Een cel  $C$  van  $P$  die  $X$  bevat is namelijk de doorsnede van  $P$  met één van de definiërende hypervlakken  $H_i$  en de link

van  $X$  vinden we als doorsnede van  $P$  met een hypervlak  $H$ . De link van  $X$  in  $C$  is dan de doorsnede  $(P \cap H_i) \cap H$  en een cel van de link van  $X$  in  $P$  is  $(P \cap H) \cap H_i$  en deze twee doorsnedes zijn gelijk. Per inductie over de dimensie weten we dat de cel van de link symbool  $\{r_2, \dots, r_{n-2}\}$  heeft, dus concluderen we dat de link van  $X$  in  $C$  een reguliere polytoop in dimensie  $n - 2$  met Schläfli symbool  $\{r_2, \dots, r_{n-2}\}$  is. Maar omdat de 2-dimensionale zijvlakken van  $P$  en van  $C$  dezelfde type hebben, heeft  $C$  de type  $\{r_1, \dots, r_{n-2}\}$ .  $\square$

De samenhang dat de link van een cel met hoekpunt  $X$  een cel van de link van  $X$  is, geeft belangrijke informatie. Bij een 3-dimensionaal veelvlak met Schläfli symbool  $\{p, q\}$  zien we natuurlijk meteen dat er  $q$  cellen in een hoekpunt samen komen. Maar hoe zit het bij een 4-dimensionale reguliere polytoop met Schläfli symbool  $\{p, q, r\}$ , hoeveel cellen van type  $\{p, q\}$  komen hier in een hoekpunt  $X$  samen? De cellen van de link (van type  $\{q, r\}$ ) zijn reguliere  $q$ -hoeken en elke cel van de link is de link van een cel die  $X$  bevat. Het aantal cellen die  $X$  bevatten is dus gelijk aan het aantal cellen van de link.

We zullen zien dat een *hyperkubus* Schläfli symbool  $\{4, 3, 3\}$  heeft, de links zijn dus tetraëders, begrensd door 4 driehoeken, en elke van deze driehoeken ligt in een andere cel die een vast hoekpunt bevat, dus komen in elk hoekpunt 4 gewone kubussen samen.

## 3.2 De stelling van Schläfli

In deze sectie gaan we een eigenschap bepalen aan die reguliere polytopen moeten voldoen en die de mogelijkheden voor reguliere polytopen sterk beperkt. In de volgende sectie zullen we dan zien dat alle gevonden mogelijkheden ook gerealiseerd kunnen worden.

Bij de opbouw van reguliere polytopen is het voor de hand liggend dat we stapsgewijs van dimensie naar dimensie gaan, want de cellen en links van een  $n$ -dimensionale reguliere polytoop zijn reguliere polytopen in dimensie  $n - 1$ .

We hebben gezien dat voor de regelmatige veelvlakken de relatie  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$  tussen het aantal cellen in een hoekpunt en het aantal zijden van de cellen de mogelijke veelvlakken precies karakteriseert. We zullen nu een algemene eigenschap bekijken die hetzelfde voor het algemeen geval moet verrichten.

Zij  $P$  een reguliere polytoop in dimensie  $n$ , zij  $r$  de afstand van zijn hoekpunten naar het middelpunt van  $P$  (zijn straal) en zij  $l$  de lengte van de ribben van  $P$ . Dan definiëren we

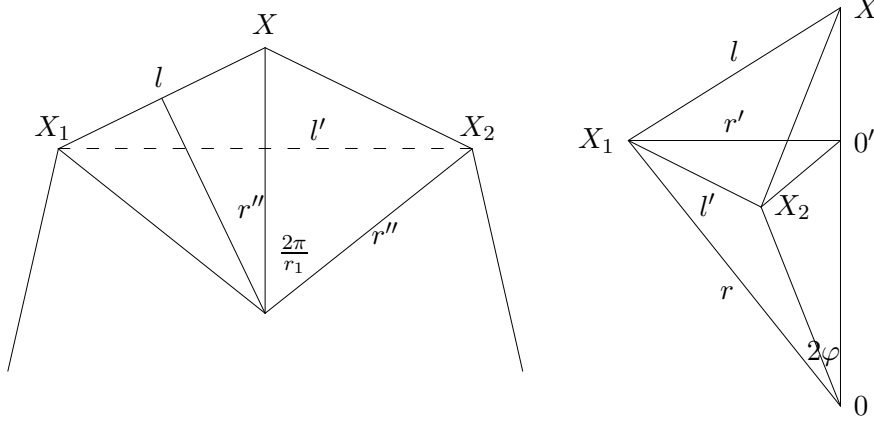
$$\rho(P) := \frac{l^2}{4r^2}.$$

**3.3 Propositie** *Zij  $P$  een reguliere polytoop in dimensie  $n$  met Schläfli symbool  $\{r_1, \dots, r_{n-1}\}$  en zij  $P'$  de link van een van de hoekpunten  $X$  van  $P$ . Dan geldt*

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right)}{\rho(P')}.$$

*Verder is  $\rho(P) = \sin^2(\varphi)$ , waarbij  $2\varphi$  de hoek tussen twee door een ribbe verbonden hoekpunten vanuit het middelpunt van  $P$  is.*

BEWIJS: De straal en de lengte van de ribben van  $P'$  noteren we met  $r'$  en  $l'$ . Laten  $X_1, X_2$  twee door een ribbe verbonden punten in de link  $P'$  van  $X$  zijn. Dan zijn  $X_1, X, X_2$  drie op elkaar volgende punten in een 2-cel van  $P$ , dus in een  $r_1$ -hoek. Als we de straal van deze  $r_1$ -hoek  $r''$  noemen, geldt  $\frac{l}{2} = r'' \sin(\frac{\pi}{r_1})$  en  $\frac{l'}{2} = r'' \sin(\frac{2\pi}{r_1}) = 2r'' \sin(\frac{\pi}{r_1}) \cos(\frac{\pi}{r_1})$  (want  $\sin(2\alpha) = 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)$ ) en dus  $l' = 2l \cos(\frac{\pi}{r_1})$ .



Als we de hoek tussen  $X_1$  en  $X$  (in het middelpunt  $0$  van  $P$ )  $2\varphi$  noemen, geldt  $\frac{l}{2} = r \sin(\varphi)$ . Voor de straal  $r'$  van de link  $P'$  (met middelpunt  $0'$ ) hebben we  $r' = r \sin(2\varphi) = r \cdot 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) = l \cos(\varphi)$ . Ingevuld voor  $P'$  geeft dit  $\rho(P') = \frac{l'^2}{4r'^2} = \frac{4l^2 \cos^2(\frac{\pi}{r_1})}{4l^2 \cos^2(\varphi)} = \frac{\cos^2(\frac{\pi}{r_1})}{\cos^2(\varphi)}$  en dus  $\cos^2(\varphi) = \frac{\cos^2(\frac{\pi}{r_1})}{\rho(P')}$ .

Uit  $\frac{l}{2} = r \sin(\varphi)$  volgt  $\frac{l^2}{4r^2} = \sin^2(\varphi)$  en dus

$$\rho(P) = \frac{l^2}{4r^2} = \sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi) = 1 - \frac{\cos^2(\frac{\pi}{r_1})}{\rho(P')}.$$

□

### 3.4 Stelling van Schläfli

De enige mogelijke reguliere polytopen in dimensie  $n$  zijn de polytopen met de volgende Schläfli symbolen:

$$n = 2 : \{p\} \text{ met } p \geq 3.$$

$$n = 3 : \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 3\}, \{5, 3\}.$$

$$n = 4 : \{3, 3, 3\}, \{3, 3, 4\}, \{3, 3, 5\}, \{3, 4, 3\}, \{4, 3, 3\}, \{5, 3, 3\}.$$

$$n \geq 5 : \underbrace{\{3, \dots, 3\}}_{n-1}, \underbrace{\{3, \dots, 3, 4\}}_{n-2}, \{4, \underbrace{3, \dots, 3}_{n-2}\}.$$

BEWIJS: Omdat  $\rho(P) = \sin^2(\varphi)$  geldt, is in het bijzonder  $\rho(P) > 0$ . Met  $\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2(\frac{\pi}{r_1})}{\rho(P')}$  volgt hieruit:

$$\cos^2(\frac{\pi}{r_1}) < \rho(P'),$$

waarbij  $P'$  de link van een hoekpunt van  $P$  is. We gaan nu stapsgewijs voor elke dimensie de mogelijke Schläfli symbolen bepalen, door voor een gegeven link de

mogelijke waarden van  $r_1$  te bepalen. Omdat  $r_1 \geq 3$  hebben we  $\cos^2(\frac{\pi}{r_1}) \geq \frac{1}{4}$ . In het bijzonder moet voor de link  $P'$  van  $P$  dus gelden dat  $\rho(P') > \frac{1}{4}$ , polytopen met kleinere  $\rho$ -waarden kunnen dus geen link van een reguliere polytoop zijn. Omdat  $\rho(P') = \sin^2(\varphi')$  als  $2\varphi'$  de hoek tussen twee door een ribbe verbonden hoekpunten van de link  $P'$  is, kunnen we dit ook zo uitdrukken dat de hoek  $2\varphi' > 60^\circ$  moet zijn, want  $\sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$ .

We noteren even de relevante waarden voor  $\cos^2(\frac{\pi}{r_1})$ :

$$\cos^2(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{4}, \quad \cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}, \quad \cos^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{3 + \sqrt{5}}{8} \approx 0.655, \quad \cos^2(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{4}.$$

$n = 2$ : Voor  $p \geq 3$  hebben we de regelmatige veelhoeken  $\{p\}$  en hiervoor geldt  $\rho(\{p\}) = \sin^2(\frac{2\pi}{2p}) = \sin^2(\frac{\pi}{p})$ . De relevante waarden voor de links  $\{r_2\}$  zijn:

$$\begin{aligned} \rho(\{3\}) &= \sin^2(\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{4}, \text{ hoek van } 120^\circ, \\ \rho(\{4\}) &= \sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}, \text{ hoek van } 90^\circ, \\ \rho(\{5\}) &= \sin^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \approx 0.345, \text{ hoek van } 72^\circ. \end{aligned}$$

Merk op dat  $\{6\}$  niet de link van een 3-dimensionale reguliere polytoop kan zijn omdat  $\rho(\{6\}) = \sin^2(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}$ .

$n = 3$ : Voor een link van type  $\{3\}$  moet  $\cos^2(\frac{\pi}{r_1}) < \frac{3}{4}$  zijn, dus hebben we de drie mogelijkheden  $r_1 = 3, 4, 5$ :

$$r_1 = 3 : P = \{3, 3\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}, \text{ hoek van } \approx 109.5^\circ,$$

$$r_1 = 4 : P = \{4, 3\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}, \text{ hoek van } \approx 70.5^\circ,$$

$$r_1 = 5 : P = \{5, 3\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{3-\sqrt{5}}{6} \approx 0.127, \text{ hoek van } \approx 41.8^\circ. \text{ Omdat } \rho(P) \leq \frac{1}{4} \text{ is } \{5, 3\} \text{ niet de link van een 4-dimensionale reguliere polytoop.}$$

Voor een link van type  $\{4\}$  moet  $\cos^2(\frac{\pi}{r_1}) < \frac{1}{2}$  zijn, dus is  $r_1 = 3$  de enige mogelijkheid:

$$P = \{3, 4\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \text{ hoek van } 90^\circ.$$

Voor een link van type  $\{5\}$  moet  $\cos^2(\frac{\pi}{r_1}) < \frac{5-\sqrt{5}}{8}$  zijn, dus is  $r_1 = 3$  de enige mogelijkheid:

$$P = \{3, 5\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \approx 0.276, \text{ hoek van } \approx 63.4^\circ.$$

$n = 4$ : Voor een link van type  $\{3, 3\}$  moet  $\cos^2(\frac{\pi}{r_1}) < \frac{2}{3}$  zijn, dus hebben we de drie mogelijkheden  $r_1 = 3, 4, 5$ :

$r_1 = 3 : P = \{3, 3, 3\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{8}$ , hoek van  $\approx 104.5^\circ$ ,

$r_1 = 4 : P = \{4, 3, 3\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$ , hoek van  $60^\circ$ . Omdat  $\rho(P) \leq \frac{1}{4}$  is  $\{4, 3, 3\}$  niet de link van een 5-dimensionale reguliere polytoop.

$r_1 = 5 : P = \{5, 3, 3\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}{\frac{2}{3}} = \frac{7-3\sqrt{5}}{16} \approx 0.018$ , hoek van  $\approx 15.5^\circ$ .  
Omdat  $\rho(P) \leq \frac{1}{4}$  is  $\{5, 3, 3\}$  niet de link van een 5-dimensionale reguliere polytoop.

Voor een link van type  $\{4, 3\}$  moet  $\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{1}{3}$  zijn, dus is  $r_1 = 3$  de enige mogelijkheid:

$P = \{3, 4, 3\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$ , hoek van  $60^\circ$ . Omdat  $\rho(P) \leq \frac{1}{4}$  is  $\{3, 4, 3\}$  niet de link van een 5-dimensionale reguliere polytoop.

Voor een link van type  $\{3, 4\}$  moet  $\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{1}{2}$  zijn, dus is  $r_1 = 3$  de enige mogelijkheid:

$P = \{3, 3, 4\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{1}{\frac{4}{2}} = \frac{1}{2}$ , hoek van  $90^\circ$ .

Voor een link van type  $\{3, 5\}$  moet  $\cos^2\left(\frac{\pi}{r_1}\right) < \frac{5-\sqrt{5}}{10}$  zijn, dus is  $r_1 = 3$  de enige mogelijkheid:

$P = \{3, 3, 5\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \frac{3-\sqrt{5}}{8} \approx 0.095$ , hoek van  $36^\circ$ .  
Omdat  $\rho(P) \leq \frac{1}{4}$  is  $\{3, 3, 5\}$  niet de link van een 5-dimensionale reguliere polytoop.

Van de reguliere polytopen in dimensie 4 kunnen alleen maar  $\{3, 3, 3\}$  en  $\{3, 3, 4\}$  de link van een 5-dimensionale reguliere polytoop zijn.

$n \geq 5$ : We nemen voor een inductie aan dat in dimensie  $n-1$  de enige reguliere polytopen met een  $\rho$ -waarde  $> \frac{1}{4}$  de polytopen  $P'_1 = \{3, \dots, 3\}$  met  $\rho(P'_1) = \frac{n}{2(n-1)}$  en  $P'_2 = \{3, \dots, 3, 4\}$  met  $\rho(P'_2) = \frac{1}{2}$  zijn. Voor  $n-1 = 4$  hebben we dit net aangetoond.

Voor  $P'_1$  geldt dat  $\frac{1}{2} < \rho(P'_1) \leq \frac{5}{8} = 0.625$ , dus hebben we de twee mogelijkheden  $r_1 = 3$  en  $r_1 = 4$ .

$r_1 = 3 : P = \{3, 3, \dots, 3\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{2(n-1)}} = 1 - \frac{n-1}{2n} = \frac{n+1}{2n}$ .

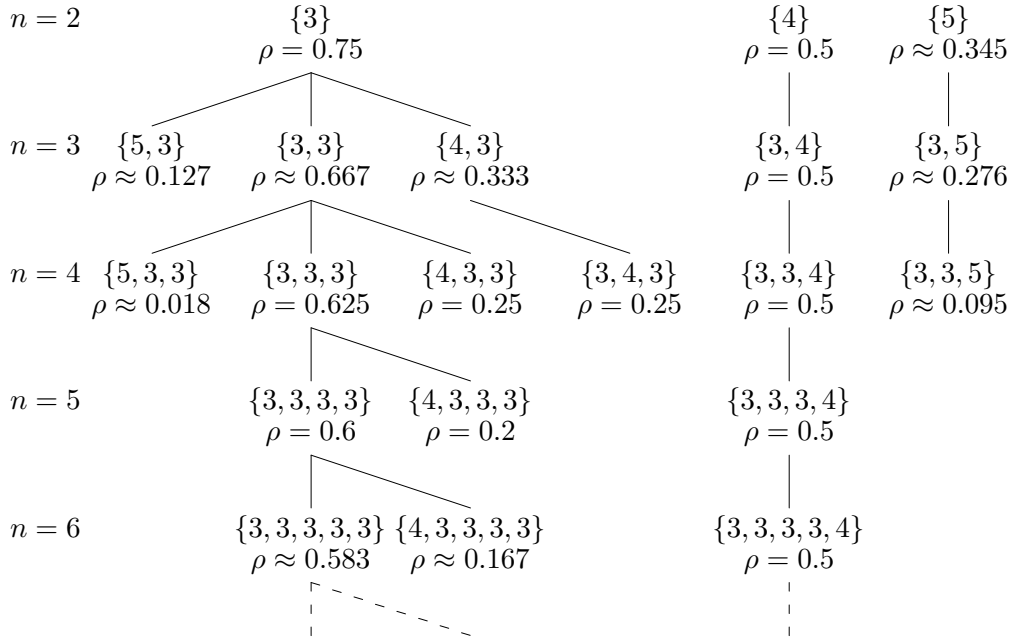
$r_1 = 4 : P = \{4, 3, \dots, 3\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{2(n-1)}} = 1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ . Omdat  $n \geq 5$  is  $\rho(P) \leq \frac{1}{4}$ , dus is  $\{4, 3, \dots, 3\}$  niet de link van een  $(n+1)$ -dimensionale reguliere polytoop.

Voor  $P'_2$  is  $\rho(P'_2) = \frac{1}{2}$ , dus hebben we alleen maar de mogelijkheid  $r_1 = 3$ :

$P = \{3, 3, \dots, 3, 4\} \Rightarrow \rho(P) = 1 - \frac{1}{\frac{4}{2}} = \frac{1}{2}$ .

Als mogelijke links van een reguliere polytoop in dimensie  $n + 1$  hebben we dus de polytopen  $P_1 = \{3, \dots, 3\}$  met  $\rho(P_1) = \frac{n+1}{2n}$  en  $P_2 = \{3, \dots, 4\}$  met  $\rho(P_2) = \frac{1}{2}$  gevonden, en dit is precies de bewering van de inductie voor dimensie  $n$ .  $\square$

We kunnen de reguliere polytopen overzichtelijk in een graaf plaatsen, waar een polytoop  $P$  in dimensie  $n$  met een polytoop  $P'$  in dimensie  $n - 1$  verbonden is, als  $P'$  de link van  $P$  is. Van de oneindig veel 2-dimensionale veelhoeken laten we alleen maar degene zien die als link van een veelvlak voorkomen.



Figuur 3: Classificatie van de  $n$ -dimensionale reguliere polytopen

## 4 Realisatie van $n$ -dimensionale reguliere polytopen

### 4.1 De oneindige series

In de stelling van Schläfli hebben we gezien dat er voor de dimensies  $n \geq 5$  hoogstens nog drie verschillende reguliere polytopen zijn. Deze hebben Schläfli symbolen  $\{3, \dots, 3\}$ ,  $\{4, 3, \dots, 3\}$  en  $\{3, \dots, 3, 4\}$  en zijn dus de hoger-dimensionale analoga van de tetraëder (symbool  $\{3, 3\}$ ), de kubus (symbool  $\{4, 3\}$ ) en de octaëder (symbool  $\{3, 4\}$ ). De constructies van deze Platonische lichamen geven de aanleiding hoe we de hoger-dimensionale polytopen kunnen construeren.

Om iets zuiniger met het papier om te gaan zullen we de coördinaten van hoekpunten en normaalvectoren steeds als rijen in niet als kolomvectoren schrijven.

#### 4.1.1 De $n$ -dimensionale kubus $\{4, 3, \dots, 3\}$

Als normaalvectoren kiezen we de vectoren van de standaardbasis in dimensie  $n$  en hun negatieven, dus de vectoren  $(\pm 1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, \dots, 0, \pm 1)$ . Als inproduct kiezen we  $a = 1$  en krijgen zo  $2n$  cellen. Als we uit elk van de paren  $(\dots, \pm 1, \dots)$  één vector kiezen, krijgen we als doorsnede van de bijhorende hypervlakken een hoekpunt, dit geeft de  $2^n$  hoekpunten  $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ .

De cel met normaalvector  $(1, 0, \dots, 0)$  bevat de hoekpunten  $(1, \pm 1, \dots, \pm 1)$  en we zien dat dit de hoekpunten van een  $(n-1)$ -dimensionale kubus zijn. De hoekpunten van de andere cellen vinden we analoog.

De link van het hoekpunt  $X = (1, 1, \dots, 1)$  zijn de punten die slechts in één coördinaat van  $X$  verschillen, dus de punten  $(-1, 1, \dots, 1)$ ,  $\dots$ ,  $(1, \dots, 1, -1)$ . Dit zijn  $n$  vectoren die alle inproduct  $n-2$  met de vector  $(1, \dots, 1)$  hebben en dus een hypervlak liggen. Verder hebben de punten onderling alle dezelfde afstand, namelijk  $\sqrt{8}$  en vormen een  $(n-1)$ -dimensionale simplex die verder op wordt beschreven. Voor de links van de andere hoekpunten kunnen we hetzelfde argument toepassen.

#### 4.1.2 De $n$ -dimensionale cokubus $\{3, \dots, 3, 4\}$

We hebben gezien dat we de octaëder uit een kubus kunnen krijgen door de rollen van normaalvectoren en hoekpunten te verwisselen, dus de hoekpunten van de kubus worden de normaalvectoren van de octaëder en andersom. Hetzelfde principe kunnen we ook voor de  $n$ -dimensionale kubus toepassen, we kiezen de hoekpunten van de  $n$ -dimensionale kubus als normaalvectoren en krijgen zo een reguliere polytoop met als hoekpunten de normaalvectoren van de  $n$ -dimensionale kubus. Omdat er zo'n nauw samenhang met de kubus is, noemen we de zo verkregen polytoop de  $n$ -dimensionale *cokubus*.

Voor de  $n$ -dimensionale cokubus kiezen we als normaalvectoren dus de vectoren  $(\pm 1, \dots, \pm 1)$  en als inproduct weer  $a = 1$  dan hebben we  $2^n$  hypervlakken. De hoekpunten die we als doorsnede van deze hypervlakken krijgen zijn juist de vectoren van de standaardbasis en hun negatieven, dus de  $2n$  vectoren  $(\pm 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, \dots, 0, \pm 1)$ .

De cel met normaalvector  $(1, \dots, 1)$  bevat de  $n$  hoekpunten  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, \dots, 0, 1)$ . Deze punten hebben onderling alle afstand  $\sqrt{2}$  en vormen een  $(n-1)$ -dimensionale simplex (zie verder op). Voor de andere cellen geldt een analoog argument.

De link van het hoekpunt  $(1, 0, \dots, 0)$  bevat de hoekpunten die 0 in de eerste coördinaat hebben, dus de punten  $(0, \pm 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, \dots, 0, \pm 1)$ . Het is duidelijk dat dit juist de hoekpunten van een  $(n-1)$ -dimensionale cokubus zijn.

### 4.1.3 De $n$ -dimensionale simplex $\{3, \dots, 3\}$

Een  $n$ -dimensionale simplex is het convexe omhulsel van  $n+1$  punten die onderling alle dezelfde afstand hebben. We hebben al gezien dat we een  $n$ -dimensionale simplex in de  $n$ -dimensionale ruimte als link van een  $(n+1)$ -dimensionale kubus of als cel van een  $(n+1)$ -dimensionale cokubus kunnen krijgen, maar we willen natuurlijk een constructie in de  $n$ -dimensionale ruimte.

Hiervoor beginnen we met  $n$  punten die onderling dezelfde afstand hebben, namelijk de vectoren  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $(0, \dots, 0, 1)$  van de standaardbasis. Deze punten vormen een  $(n-1)$ -dimensionale simplex en hebben onderling afstand  $\sqrt{2}$ . We moeten nu nog één punt vinden dat van alle deze punten ook afstand  $\sqrt{2}$  heeft. Het is duidelijk dat zo'n punt op de lijn moet liggen die loodrecht op het hypervlak met de andere  $n$  punten staat. Dit is de lijn met richtingsvector  $(1, \dots, 1)$  en we kunnen dus aannemen dat het laatste punt coördinaten  $(b, \dots, b)$  heeft. Het kwadraat van de afstand van dit punt van  $(1, 0, \dots, 0)$  moet dus 2 zijn en we berekenen dit als het kwadraat van de lengte van het verschil vector  $(b-1, b, \dots, b)$ . Er moet dus gelden dat

$$2 = (b-1)^2 + (n-1)b^2 = nb^2 - 2b + 1 \Rightarrow nb^2 - 2b - 1 = 0.$$

Dit is een kwadratische vergelijking die we makkelijk kunnen oplossen, er geldt  $nb^2 - 2b - 1 = 0 \Leftrightarrow b^2 - \frac{2}{n}b - \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow (b - \frac{1}{n})^2 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow (b - \frac{1}{n})^2 - \frac{n+1}{n^2} = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{n} \pm \frac{\sqrt{n+1}}{n}$ . We kunnen hier beide oplossingen kiezen, een punt is het gespiegelde van het andere punt in het hypervlak dat de eerste  $n$  punten bevat. Als laatste punt krijgen we dus bijvoorbeeld het punt  $(\frac{1-\sqrt{n+1}}{n}, \dots, \frac{1-\sqrt{n+1}}{n})$ .

De simplex die we zo hebben geconstrueerd heeft nog een schoonheidsfoutje, zijn middelpunt is namelijk niet het nulpunt. Hiervoor moeten we het middelpunt als gemiddelde van de  $n+1$  punten berekenen en alle punten om deze vector verschuiven. Het is duidelijk dat alle coördinaten van het middelpunt hetzelfde zijn, namelijk  $\frac{1}{n+1}(\frac{1-\sqrt{n+1}}{n} + 1) = \frac{n+1-\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}})$ .

## 4.2 De uitzonderlijke reguliere polytopen in dimensie 4

In de 3-dimensionale ruimte zijn de kubus, de octaëder en de tetraëder de reguliere polytopen van de oneindige series, de icosaeëder  $\{3, 5\}$  en de dodecaëder  $\{5, 3\}$  zijn uitzonderingen. In de 4-dimensionale ruimte zegt de stelling van Schläfli dat er drie mogelijke reguliere polytopen bestaan, en we zullen nu nagaan dat deze uitzonderlijke gevallen inderdaad ook bestaan. De twee polytopen  $\{3, 3, 5\}$  en  $\{5, 3, 3\}$  zijn in principe 4-dimensionale veralgemeningen van



de icosaeëder en de dodecaeëder, de laatste polytoop met symbool  $\{3, 4, 3\}$  staat geïsoleerd.

#### 4.2.1 De 24-cel $\{3, 4, 3\}$

De 24-cel krijgen we als combinatie van een 4-dimensionale kubus en een 4-dimensionale cokubus. Als normaalvectoren kiezen we de vectoren  $(\pm 2, 0, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 2, 0, 0)$ ,  $(0, 0, \pm 2, 0)$ ,  $(0, 0, 0, \pm 2)$  en  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$  en als inproduct  $a = 2$ , zo krijgen we 24 hypervlakken. De hoekpunten die men als doorsnede van deze hypervlakken vindt, zijn de punten  $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$  en alle permutaties van de coördinaten hiervan, dit zijn in totaal  $6 \cdot 4 = 24$  hoekpunten.

De cel met normaalvector  $(2, 0, 0, 0)$  bevat de zes hoekpunten  $(1, \pm 1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, \pm 1, 0)$  en  $(1, 0, 0, \pm 1)$  en dit zijn duidelijk de hoekpunten van een octaëder.

Omdat we twee verschillende soorten van normaalvectoren hebben, moeten we ook nog naar de cel met normaalvector  $(1, 1, 1, 1)$  kijken. Deze cel bevat de hoekpunten  $(1, 1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 1)$  en  $(0, 0, 1, 1)$ . Het is hier niet zo duidelijk dat dit de hoekpunten van een octaëder zijn. Om dit in te zien, passen we een orthogonale transformatie toe, die lengtes en hoeken

bewaart. De matrix  $T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  is orthogonaal, d.w.z. er geldt

$T^{tr}T = I$ . Als we deze transformatie op de gevonden hoekpunten van de cel toepassen, krijgen we precies de hoekpunten van de cel met normaalvector  $(2, 0, 0, 0)$ . Dit is natuurlijk geen toeval, want de matrix  $T$  is zo gekozen dat de normaalvector  $(1, 1, 1, 1)$  op  $(2, 0, 0, 0)$  afgebeeld wordt. Met dit trucje hebben we gezien dat ook de cellen van de andere normaalvectoren octaëders zijn.

De link van het hoekpunt  $(1, 1, 0, 0)$  bevat de acht hoekpunten  $(1, 0, \pm 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0, \pm 1)$ ,  $(0, 1, \pm 1, 0)$  en  $(0, 1, 0, \pm 1)$ . Het is duidelijk dat de vier punten  $(1, 0, \pm 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0, \pm 1)$  een vierkant met zijde  $\sqrt{2}$  vormen, hetzelfde geldt voor de punten  $(0, 1, \pm 1, 0)$ ,  $(0, 1, 0, \pm 1)$ . De tweede vierkant krijgen we uit de eerste door een verschuiving om de vector  $(-1, 1, 0, 0)$ , deze staat loodrecht op de twee vierkanten en heeft lengte  $\sqrt{2}$ , daarom vormen de vierkanten samen een kubus.

We kunnen nu nog een aantal details over de 24-cel verzamelen. Elk van de 2-dimensionale zijvlakken van de 24-cel is de doorsnede van precies 2 cellen. Omdat de cellen octaëders met 8 zijvlakken zijn, zijn er dus  $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 8 = 96$  gelijkzijdige driehoeken in de 24-cel. Omgekeerd weten we dat de link van een hoekpunt  $X$  een kubus is en dus 8 hoekpunten heeft. De hoekpunten van de link corresponderen met de ribben die met  $X$  verbonden zijn, dus komen in elke hoekpunt 8 ribben samen. Omdat een ribbe twee hoekpunten bevat, zijn er dus  $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 8 = 96$  ribben in de 24-cel. In een hoekpunt komen 6 octaëders samen, omdat de cellen die in een hoekpunt  $X$  samenkomen met de zijvlakken van de link van  $X$  corresponderen, en dit zijn de 6 zijden van een kubus.

Als we bij de 24-cel de rollen van normaalvectoren en hoekpunten verwisselen, krijgen we overigens ook weer een 24-cel.

OPDRACHT 8 We hebben het argument gebruikt dat een 2-dimensionaal zijvlak de doorsnede van precies twee 3-dimensionale cellen van de 24-cel is. Bewijs dat algemeen voor een  $n$ -dimensionale polytoop geldt dat een  $(n - 2)$ -dimensionale cel de doorsnede van precies twee  $(n - 1)$ -dimensionale cellen is. In het 3-dimensionale geval is dit duidelijk, maar waarom geldt deze uitspraak voor algemene dimensie  $n$ .

Het is hierbij belangrijk dat de normaalvectoren van cellen die elkaar in een  $(n - 2)$ -dimensionale cel snijden, in een 2-dimensionale deelruimte liggen (waarom?). Laat zien dat er van drie normaalvectoren die in een 2-dimensionale deelruimte liggen één geen cel van een polytoop kan definiëren (en dus overbodig voor de beschrijving van de polytoop is).

#### 4.2.2 De 600-cel $\{3, 3, 5\}$

In principe kunnen we uit het Schläfli symbool aflezen, hoe we een polytoop moeten construeren, want de type van de cellen ligt vast, en het aantal cellen dat we rond een hoekpunt moeten hebben is gelijk aan het aantal cellen van de link. In het geval van  $\{3, 3, 5\}$  moeten we dus 20 tetraëder rond een hoekpunt hebben. De expliciete constructie van zo'n polytoop is een beetje ingewikkeld, een enigszins voor de hand liggende manier maakt gebruik van hulpmiddelen die in het college *Symmetrie* behandeld worden. We zullen daarom hier alleen maar het resultaat aangeven.

Als hoekpunten heeft een reguliere polytoop met Schläfli symbool  $\{3, 3, 5\}$  de volgende 120 punten waarbij we met  $\tau$  weer de gouden snede  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  noteren:

- Alle permutaties van  $(\pm 2, 0, 0, 0)$  en van  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$  (dit zijn juist de 24 hoekpunten van een 24-cel).
- De *even* permutaties van  $(\pm \tau, \pm 1, \pm \tau^{-1}, 0)$ : Een even permutatie van vier punten is of een 3-cykel waarbij één punt op zijn plaats blijft of het ruilen van twee paren van punten. De even permutaties van  $(a, b, c, d)$  zijn dus:  $(a, d, b, c)$ ,  $(a, c, d, b)$ ,  $(d, b, a, c)$ ,  $(c, b, d, a)$ ,  $(d, a, c, b)$ ,  $(b, d, c, a)$ ,  $(c, a, b, d)$ ,  $(b, c, a, d)$ ,  $(b, a, d, c)$ ,  $(c, d, a, b)$ ,  $(d, c, b, a)$ .

Voor de verschillende keuzes van  $\pm$  krijgen we zo  $8 \cdot 12 = 96$  punten.

Om te bevestigen dat de link van een hoekpunt type  $\{3, 5\}$  heeft, kijken we als voorbeeld naar de link van het hoekpunt  $X = (2, 0, 0, 0)$ : De link van  $X$  bevat de hoekpunten  $(\tau, \pm 1, \pm \tau^{-1}, 0)$ ,  $(\tau, 0, \pm 1, \pm \tau^{-1})$ ,  $(\tau, \pm \tau^{-1}, 0, \pm 1)$  en aan de tweede tot vierde coördinaat zien we dat dit inderdaad een icosaeëder is.

Omdat de cellen van de link met de cellen corresponderen die in een hoekpunt samenkomen, komen er in elk van de 120 hoekpunten 20 tetraëders samen, want de link is een icosaeëder die 20 zijvlakken heeft. Elke tetraëder heeft 4 hoekpunten, dus hebben we op deze manier de cellen 4 keer geteld, dus zijn er  $\frac{1}{4} \cdot 120 \cdot 20 = 600$  cellen en daarom heet de polytoop met Schläfli symbool  $\{3, 3, 5\}$  ook de 600-cel.

Elke van de 600 cellen bevat 4 gelijkzijdige driehoeken, en elke driehoek ligt in precies twee cellen, dus bevat de 600-cel  $\frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 4 = 1200$  gelijkzijdige driehoeken. De hoekpunten van de link van een hoekpunt  $X$  corresponderen

met de ribben die in  $X$  samenkomen, dit zijn er dus 12. Omdat elke ribbe twee hoekpunten bevat zijn er dus  $\frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 12 = 720$  ribben in de 600-cel.

### 4.2.3 De 120-cel $\{5, 3, 3\}$

We hebben bij de 600-cel niet de normaalvectoren van de cellen aangegeven, maar net als we van de kubus naar de cokubus komen door de rollen van de normaalvectoren en de hoekpunten te verwisselen, komen we op dezelfde manier van de 600-cel naar de reguliere polytoop met Schläfli symbool  $\{5, 3, 3\}$ .

De hoekpunten van  $\{5, 3, 3\}$  zijn dus de normaalvectoren van  $\{3, 3, 5\}$  en men gaat na dat dit de volgende vectoren zijn:

- Alle permutaties van de coördinaten van:
  - $(\pm 2, \pm 2, 0, 0)$ :  $6 \cdot 4 = 24$  punten,
  - $(\pm\sqrt{5}, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ :  $4 \cdot 16 = 64$  punten,
  - $(\pm\tau, \pm\tau, \pm\tau, \pm\tau^{-2})$ :  $4 \cdot 16 = 64$  punten,
  - $(\pm\tau^2, \pm\tau^{-1}, \pm\tau^{-1}, \pm\tau^{-1})$ :  $4 \cdot 16 = 64$  punten.
- Alle even permutaties van de coördinaten van:
  - $(\pm\tau^2, \pm\tau^{-2}, \pm 1, 0)$ :  $12 \cdot 8 = 96$  punten,
  - $(\pm\sqrt{5}, \pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0)$ :  $12 \cdot 8 = 96$  punten,
  - $(\pm 2, \pm 1, \pm\tau, \pm\tau^{-1})$ :  $12 \cdot 16 = 192$  punten.

In totaal krijgen we zo  $24 + 3 \cdot 64 + 2 \cdot 96 + 192 = 600$  hoekpunten.

Omdat de cellen van de link met de cellen corresponderen die in een hoekpunt samenkomen, komen er in elk hoekpunt 4 dodecaëders samen, want de link is een tetraëder en die heeft 4 zijvlakken. Elke dodecaëder heeft 20 hoekpunten, daarom zijn er  $\frac{1}{20} \cdot 600 \cdot 4 = 120$  cellen en daarom heet dit ook de 120-cel. Natuurlijk wisten we dit al eerder, want de cellen van  $\{5, 3, 3\}$  corresponderen met de hoekpunten van  $\{3, 3, 5\}$ , en dit zijn er 120.

Elke van de 120 cellen bevat 12 reguliere vijfhoeken, en elke vijfhoek ligt in precies twee cellen, dus bevat de 120-cel  $\frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 12 = 720$  reguliere vijfhoeken. De hoekpunten van de link van een hoekpunt  $X$  corresponderen met de ribben die in  $X$  samenkomen, dit zijn er dus 4. Omdat elke ribbe twee hoekpunten bevat zijn er dus  $\frac{1}{2} \cdot 600 \cdot 4 = 1200$  ribben in de 120-cel.

## 4.3 Schlegel projecties

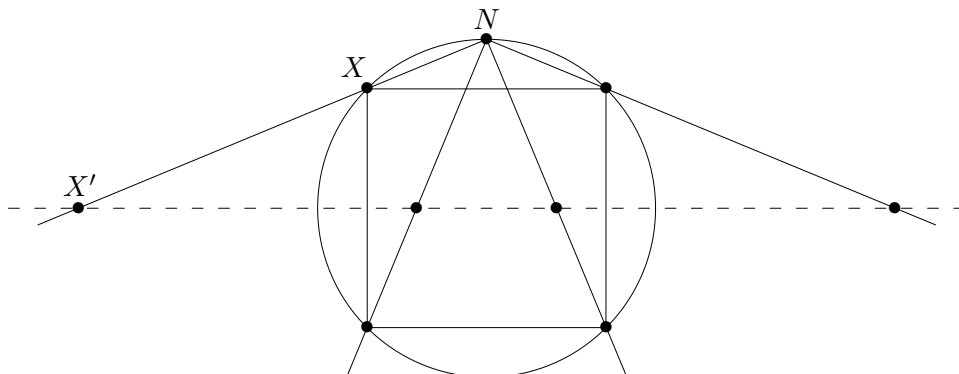
Om een goed idee van de 4-dimensionale polytopen te krijgen, is het handig om naar projecties te kijken. Net zo als we gewend zijn 3-dimensionale objecten door projecties in het 2-dimensionale vlak (als plaatjes) te bekijken, zullen we 4-dimensionale polytopen door projecties in de 3-dimensionale ruimte beschrijven. De projecties die we hierbij toepassen zijn *centraalprojecties*, dat wil zeggen we kijken uit een punt naar een polytoop en krijgen als projectie van een punt het snijpunt van de lijn van ons oog door het punt met het projectievlak.

We kiezen nu een centraalprojectie vanuit een speciaal punt: We weten dat de punten van een reguliere polytoop alle dezelfde afstand van het middelpunt van de polytoop hebben, ze liggen dus op een  $n$ -dimensionale bol. Op die

bol kiezen we de noordpool zo dat hij de normaalvector van een cel is. De centraalprojectie vanuit de noordpool noemen we dan de *Schlegel projectie* van de polytoop.

Als voorbeeld kijken we naar de gewone 3-dimensionale kubus: De hoekpunten hebben coördinaten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  en liggen dus op een bol van straal  $\sqrt{3}$ . Omdat de vector  $(0, 0, 1)$  een normaalvector is kiezen we  $N := (0, 0, \sqrt{3})$  als noordpool. De lijn door de noordpool en een hoekpunt  $X$  is gegeven door  $N + t(X - N)$  en we moeten de parameter  $t$  zo bepalen dat de  $z$ -coördinaat 0 wordt. Voor  $X = (1, 1, 1)$  hebben we bijvoorbeeld  $N + t(X - N) = (t, t, \sqrt{3} + t(1 - \sqrt{3}))$  en uit  $\sqrt{3} + t(1 - \sqrt{3}) = 0$  volgt  $t = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$ . Als projectie van  $X = (1, 1, 1)$  krijgen we dus het punt  $X' = (\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2})$ , de  $z$ -coördinaat die sowieso 0 is wordt gewoon weggelaten.

In Figuur 4 is het principe van de Schlegel projectie geïllustreerd. We kijken hierbij op de voorkant van een kubus en zien de bol die de kubus bevat als een cirkel. Het vlak met  $z$ -coördinaat 0 is door de stippellijn aangegeven.



Figuur 4: Principe van de Schlegel projectie

Vaak is het handig de Schlegel projectie met behulp van het inproduct uit te rekenen: We willen bereiken dat  $N + t(X - N)$  in het vlak ligt dat loodrecht op de vector  $N$  staat, daarom moet het inproduct  $(N + t(X - N), N) = 0$  zijn. Maar dit betekent dat  $(N, N) = t((N, N) - (X, N))$  en dus

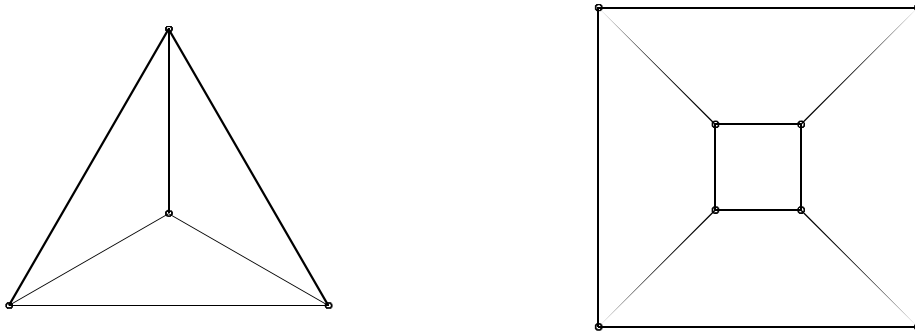
$$t = \frac{(N, N)}{(N, N) - (X, N)}.$$

Voor het voorbeeld boven is dus  $t = \frac{3}{3-\sqrt{3}} = \frac{3(3+\sqrt{3})}{6} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$  (gelukkig hetzelfde als boven).

#### 4.3.1 Schlegel projecties van de Platonische lichamen

Als we de boven beschreven methode op de hoekpunten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  van de kubus toepassen, krijgen we de projecties  $(\pm \frac{3+\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{3+\sqrt{3}}{2})$  voor de punten met  $z$ -coördinaat 1 en  $(\pm \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{3-\sqrt{3}}{2})$  voor de punten met  $z$ -coördinaat  $-1$ . In de projectie verbinden we de hoekpunten die door een ribbe verbonden zijn ook

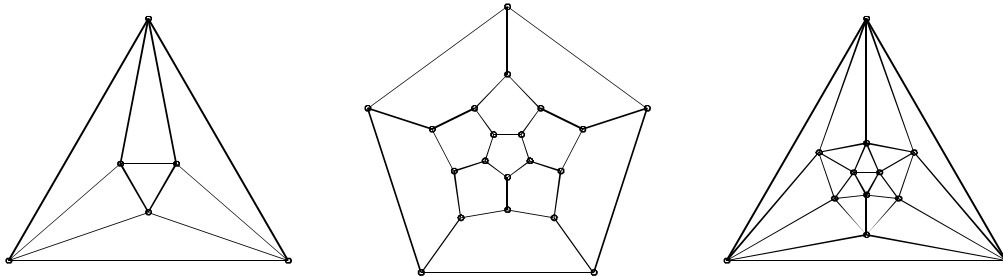
met een ribbe, dit geeft de Schlegel projectie voor de kubus zo als in Figuur 5 te zien.



Figuur 5: Schlegel projecties van de tetraëder en de kubus

We kunnen ons de Schlegel projectie zo voorstellen dat we met het oog heel dicht aan de voorkant van de kubus zitten en binnen de kubus kijken. De grote vierkant is dan de voorkant en de kleine vierkant in het midden de achterkant, de vier trapeziums zijn de vier andere zijvlakken.

Op eenzelfde manier krijgen we de Schlegel projecties van de andere Platonische lichamen, deze zijn in Figuren 5 en 6 afgebeeld.



Figuur 6: Schlegel projecties van de octaëder, dodecaëder en icoesaëder

Het is duidelijk te zien dat de voorkant van een lichaam de omtrek van de Schlegel projectie geeft, terwijl de achterkant de kleine veelhoek in het midden geeft (met uitzondering van de tetraëder). De andere zijvlakken zijn vertekend en vormen geen regelmatige veelhoeken meer.

#### 4.3.2 Schlegel projecties voor de 4-dimensionale reguliere polytopen

Bij de Schlegel projecties van de 4-dimensionale polytopen zullen we altijd aannemen dat de noordpool in de richting van de vierde vector van de standaardbasis ligt, dus een positief veelvoud van  $(0, 0, 0, 1)$  is (we blijven rijvectoren schrijven). We moeten dus in elk geval ervoor zorgen dat de vector  $(0, 0, 0, 1)$  een

normaalvector van een cel van de polytoop is. In het geval van de 4-dimensionale kubus en de 24-cel was dat in onze beschrijving sowieso al het geval, maar voor de 4-dimensionale simplex en de 4-dimensionale cokubus moeten we hier nog een orthogonale transformatie toepassen, die een van de normaalvectoren op de richting  $(0, 0, 0, 1)$  afbeeldt.

### De 4-dimensionale simplex $\{3, 3, 3\}$

Zo als we de 4-dimensionale simplex boven hebben beschreven, is de vector  $(0, 0, 0, 1)$  geen normaalvector van een cel. Maar we kunnen makkelijk hoekpunten van een 4-dimensionale simplex aangeven, waar dit wel het geval is.

Analoog met het 3-dimensionale geval van de tetraëder geldt, dat een hoekpunt op de zuidpool moet liggen als de vector naar de noordpool een normaalvector is, dus kiezen we als eerste hoekpunt de vector  $(0, 0, 0, -4b)$  (de factor 4 zal straks helder worden). De link van deze hoekpunt is een tetraëder die loodrecht op de vector naar de zuidpool staat, dus kunnen we de andere vier hoekpunten kiezen als  $(1, 1, 1, b)$ ,  $(1, -1, -1, b)$ ,  $(-1, 1, -1, b)$  en  $(-1, -1, 1, b)$ . De eerste drie coördinaten geven hierbij een tetraëder aan zo als we die eerder hebben gezien. We zien nu dat de som van deze vijf hoekpunten de nulvector geeft, dit was de reden voor de factor 4 bij het eerste hoekpunt.

We moeten nu met behulp van de parameter  $b$  nog ervoor zorgen, dat de hoekpunten alle dezelfde afstand van het middelpunt hebben, hiervoor moet gelden dat  $16b^2 = 3 + b^2$ , dus  $15b^2 = 3$  en dus  $b = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Omdat we willen dat de eerste hoekpunt de zuidpool wordt, moeten we  $b > 0$  kiezen en om de  $\sqrt{5}$  in de noemer kwijt te raken, schalen we alle punten met  $\sqrt{5}$ . Dit geeft de hoekpunten

$$\begin{aligned} X_1 &= (0, 0, 0, -4), \\ X_2 &= (\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{5}, 1), \\ X_3 &= (\sqrt{5}, -\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 1), \\ X_4 &= (-\sqrt{5}, \sqrt{5}, -\sqrt{5}, 1), \\ X_5 &= (-\sqrt{5}, -\sqrt{5}, \sqrt{5}, 1). \end{aligned}$$

De noordpool moet dezelfde lengte als deze vectoren hebben, dus is de vector  $N = (0, 0, 0, 4)$  de noordpool.

We berekenen nu de projecties van de hoekpunten zo dat  $X'_i = N + t(X_i - N)$  van de vorm  $(x, y, z, 0)$  is, en we hadden gezien dat we dit met behulp van de inproducten makkelijk uit kunnen rekenen, namelijk door:

$$X'_i = N + t(X_i - N) \quad \text{met} \quad t = \frac{(N, N)}{(N, N) - (X_i, N)}.$$

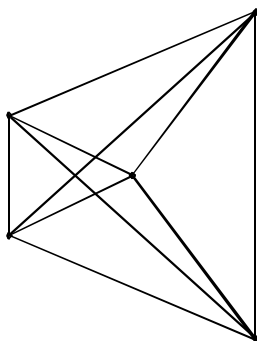
Omdat de eerste drie coördinaten van  $N$  gelijk aan 0 zijn en we de vierde coördinaat bij de projectie weglaten, hoeven we in feite alleen maar  $t \cdot X_i$  te berekenen en hiervan de eerste drie coördinaten te pakken.

Omdat  $X_1$  op de as door de noordpool en het nulpunt ligt, is zijn projectie  $X'_1 = (0, 0, 0)$ . Voor de andere hoekpunten geldt, dat ze alle de vierde coördinaat

gelijk aan 1 hebben, dus is in alle gevallen  $t = \frac{16}{16-4} = \frac{4}{3}$ . Als we dit invullen, krijgen we de projecties

$$\begin{aligned} X'_1 &= (0, 0, 0), \\ X'_2 &= \left(\frac{4}{3}\sqrt{5}, \frac{4}{3}\sqrt{5}, \frac{4}{3}\sqrt{5}\right), \\ X'_3 &= \left(\frac{4}{3}\sqrt{5}, -\frac{4}{3}\sqrt{5}, -\frac{4}{3}\sqrt{5}\right), \\ X'_4 &= \left(-\frac{4}{3}\sqrt{5}, \frac{4}{3}\sqrt{5}, -\frac{4}{3}\sqrt{5}\right), \\ X'_5 &= \left(-\frac{4}{3}\sqrt{5}, -\frac{4}{3}\sqrt{5}, \frac{4}{3}\sqrt{5}\right). \end{aligned}$$

We zien dat de punten  $X'_2, X'_3, X'_4, X'_5$  een schaling met de factor  $\frac{4}{3}\sqrt{5}$  van de tetraëder met hoekpunten  $(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$  is. Daarom is de Schlegel projectie van de 4-dimensionale simplex een tetraëder met als vijfde hoekpunt zijn middelpunt. De 5 cellen van de simplex zijn de buitenste tetraëder en de vier piramiden met als grondvlak een zijvlak van de buitenste tetraëder en als spits het middelpunt. Dit is in Figuur 7 goed te zien.



Figuur 7: Schlegel projectie van de 4-dimensionale simplex

### De 4-dimensionale kubus $\{4, 3, 3\}$

De 4-dimensionale kubus heeft hoekpunten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$  en omdat de hoekpunten afstand 2 van het nulpunt hebben, is de noordpool  $N = (0, 0, 0, 2)$ . Dit is tegelijkertijd een vector die loodrecht op een van de cellen van de kubus staat.

Voor de hoekpunten  $X_i$  met 1 in de vierde coördinaat is  $t = \frac{(N, N)}{(N, N) - (X_i, N)} = \frac{4}{4-2} = 2$  en voor de hoekpunten  $X_i$  met vierde coördinaat  $-1$  is  $t = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$ .

Van de hoekpunten met vierde coördinaat 1 krijgen we dus de projecties  $X'_{1, \dots, 8} = (\pm 2, \pm 2, \pm 2)$  en van de hoekpunten met vierde coördinaat  $-1$  krijgen we de projecties  $X'_{9, \dots, 16} = (\pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{3})$ .

De eerste 8 punten vormen de hoekpunten van een grote kubus met zijden 4 en de andere 8 punten geven een kleine kubus met zijden  $\frac{4}{3}$ . Een plaatje hiervan is in Figuur 8 te zien.

### De 4-dimensionale cokubus $\{3, 3, 4\}$

In dit geval moeten we net als bij de simplex eerst ervoor zorgen dat de vector  $(0, 0, 0, 1)$  een normaalvector van een cel wordt. Hiervoor passen we een orthogonale transformatie toe, die de (normaal)vector  $(1, 1, 1, 1)$  op  $(0, 0, 0, 2)$  afbeeldt. Deze transformatie heeft de matrix

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

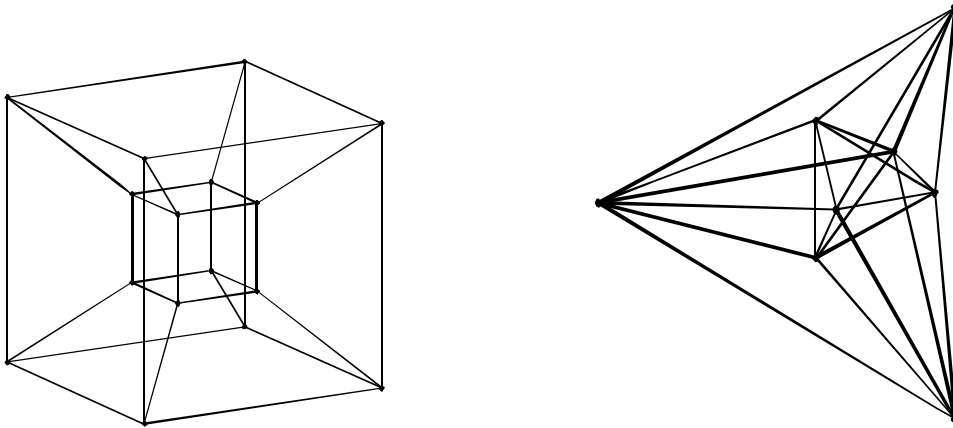
Maar de hoekpunten van een 4-dimensionale cokubus zijn gewoon de vectoren van de standaardbasis en hun negatieven, en als we hier de matrix op toepassen, krijgen we gewoon de kolommen van  $T$  en hun negatieven als beeldvectoren van de hoekpunten. Als we de zo verkregen hoekpunten nog met een factor 2 schalen, hebben we als nieuwe hoekpunten van een 4-dimensionale cokubus:

$$\pm(1, 1, 1, 1), \quad \pm(1, 1, -1, -1), \quad \pm(1, -1, 1, -1), \quad \pm(1, -1, -1, 1).$$

Omdat de hoekpunten afstand 2 van het nulpunt hebben, kiezen we  $N = (0, 0, 0, 2)$  als noordpool.

Voor de hoekpunten  $X_i$  met 1 in de vierde coördinaat is  $t = \frac{(N, N)}{(N, N) - (X_i, N)} = \frac{4}{4-2} = 2$  en voor de hoekpunten  $X_i$  met vierde coördinaat  $-1$  is  $t = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3}$ .

Van de hoekpunten met vierde coördinaat 1 krijgen we dus de projecties  $(2, 2, 2)$ ,  $(-2, -2, 2)$ ,  $(-2, 2, -2)$  en  $(2, -2, -2)$ . De hoekpunten met vierde coördinaat  $-1$  geven de projecties  $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ,  $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  en  $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ .



Figuur 8: Schlegel projecties van de 4-dimensionale kubus en cokubus

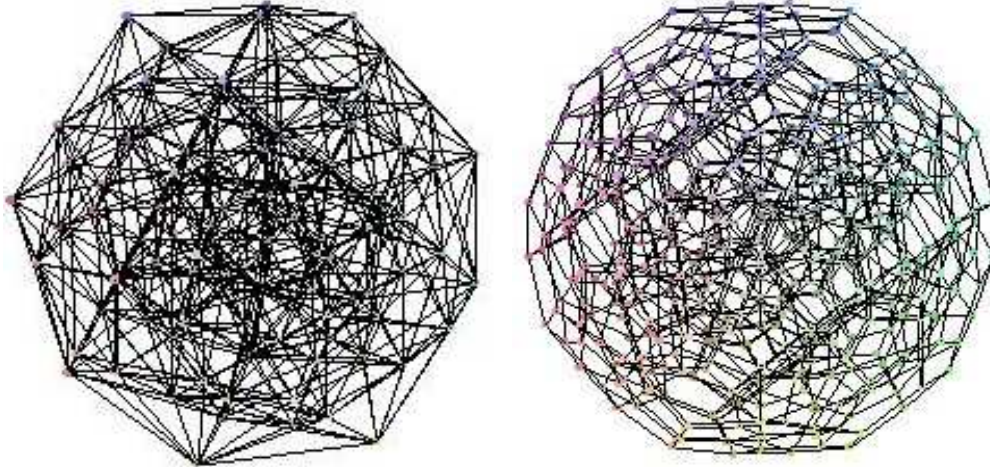
De eerste vier hoekpunten vormen een grote tetraëder met straal  $2\sqrt{3}$  de andere vier hoekpunten een kleine tetraëder met straal  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ . Hierbij zijn de oriëntaties van de twee tetraëders precies tegengesteld zo als in Figuur 8 te zien: de hoeken van de grote tetraëder liggen in de richting van de zijvlakken van de kleine tetraëder en omgedraaid.



### De reguliere polytopen $\{3, 4, 3\}$ , $\{3, 3, 5\}$ en $\{5, 3, 3\}$

Voor de 24-cel  $\{3, 4, 3\}$  wordt de Schlegel projectie in een opgave hieronder behandeld.

De Schlegel projecties voor de 600-cel  $\{3, 3, 5\}$  en de 120-cel  $\{5, 3, 3\}$  zijn nogal ingewikkeld en onoverzichtelijk, zo als de plaatjes in Figuur 9 laten zien.



Figuur 9: Schlegel projecties van de 600-cel en de 120-cel

### OPGAVEN

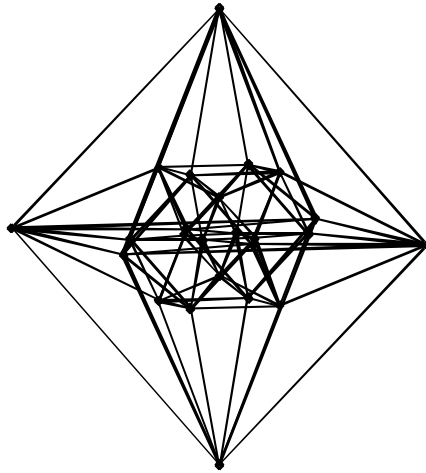
6. Geef voor de 4-dimensionale reguliere polytopen met Schläfli symbolen  $\{3, 3, 3\}$ ,  $\{4, 3, 3\}$  en  $\{3, 3, 4\}$  (dus voor de 4-dimensionale simplex, kubus en cokubus) het aantal hoekpunten, ribben, 2-dimensionale zijvlakken en cellen aan.
7. De 24-cel  $\{3, 4, 3\}$  heeft de 24 hoekpunten  $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$ ,  $(\pm 1, 0, \pm 1, 0)$ ,  $(\pm 1, 0, 0, \pm 1)$ ,  $(0, \pm 1, \pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0, \pm 1)$ ,  $(0, 0, \pm 1, \pm 1)$ . De vector  $(0, 0, 0, 1)$  is de normaalvector van een cel en omdat de hoekpunten afstand  $\sqrt{2}$  van het nulpunt hebben, kiezen we  $N = (0, 0, 0, \sqrt{2})$  als noordpool.
  - (i) Bereken de Schlegel projectie van de hoekpunten van de 24-cel.
  - (ii) Laat zien dat in de projectie 6 van de hoekpunten een grote octaëder met straal  $2 + \sqrt{2}$  vormen en 6 andere hoekpunten een kleine octaëder met straal  $2 - \sqrt{2}$ .

Ga na dat deze twee octaëders inderdaad cellen van de 24-cel zijn (d.w.z. dat de originele punten in een hypervlak liggen). Wat zijn de normaalvectoren van deze cellen?
  - (iii) Laat zien dat de projecties van de andere 12 hoekpunten de middelpunten van de ribben van een kubus met hoekpunten  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  zijn.

Ga na dat de vier punten op een zijvlak van deze kubus samen met een punt van de grote en een punt van de kleine octaëder ook een cel vormen. Dit geeft 6 verdere cellen van de 24-cel. Wat zijn in dit geval de normaalvectoren?

- (iv) De resterende 16 cellen hebben de normaalvectoren  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Laat aan de hand van één van deze cellen zien, dat deze cellen in de Schlegel projectie vertekende antiprisma's worden. Ga bijvoorbeeld na dat in het geval van de cel met normaalvector  $(1, 1, 1, 1)$  de projectie een antiprisma wordt met als grondvlak een zijvlak van de grote octaëder uit (ii) en als bovenvlak een gelijkzijdige driehoek die door de middelpunten van de ribben rond een hoekpunt van de kubus uit (iii) gevormd wordt.

In feite zijn alle cellen met een normaalvector die 1 in de vierde coördinaat heeft van dit type. Als de normaalvector van de cel een  $-1$  in de vierde coördinaat heeft, is het grondvlak van het antiprisma een zijvlak van de kleine octaëder uit (ii).



Figuur 10: Schlegel projectie van de 24-cel