Rare bewijzen

Opgave 1.
We tonen aan dat 0 het enige getal is!
Zij $x = a$. Door beide zijden van de vergelijking met x te vermenigvuldigen krijgen we $x^2 = ax$. Nu trekken we a^2 af, dit geeft $x^2 - a^2 = ax - a^2$, anders gezegd $(x-a)(x+a) = a(x-a)$. Hieruit volgt $x + a = a$ en dus $x = 0$.
Waar gaat iets mis?

Opgave 2.
Elke mens heeft dezelfde haarkleur!
Dit bewijzen we met volledige inductie. Voor een groep met 1 mens is de uitspraak duidelijk. Kijk nu naar een groep van n mensen die in een keurige rij staan. Per inductie hebben de eerste $n-1$ mensen in de rij dezelfde haarkleur, maar ook de laatste $n-1$ mensen hebben dezelfde haarkleur. Maar dan hebben ze alle dezelfde haarkleur.

Opgave 3.
Iedereen weet (hopelijk) dat $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Door n naar oneindig te laten gaan krijgen we de meetkundige reeks: $1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ (bijvoorbeeld $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = 2$). Door enerzijds deze vergelijking met x te vermenigvuldigen en anderzijds x door $\frac{1}{x}$ te vervangen krijgen we de twee relaties:

$$x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{x}{1-x} \quad \text{en} \quad 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}.$$

Als we deze twee vergelijkingen bij elkaar optellen krijgen we

$$1 + (x + \frac{1}{x}) + (x^2 + \frac{1}{x^2}) + \ldots = \frac{x}{1-x} + \frac{x}{x-1} = 0.$$

Maar voor $x > 0$ is de linkerzijde toch groter dan 1, is dus $0 > 1$ of wat gaat er mis?

Opgave 4.
Een hotel met twaalf kamers heeft per ongeluk dertien reserveringen voor een nacht geaccepteerd. De manager lost dit als volgt op: Hij waarschuwt de dertiende persoon dat hij tijdelijk mee in kamer 1 moet, maar uiteindelijk zijn eigen kamer zal krijgen. De andere personen worden één bij één in een kamer geplaatst, beginnend met kamer 1. Aan het eind van deze plaatsing zijn er dus twee personen in kamer 1, de derde persoon is in kamer 2, de vierde persoon in kamer 3, enzovoorts. De twaalfde persoon zit dus in kamer 11 en kamer 12 is vrij zo dat de dertiende persoon zo als beloofd in zijn eigen kamer terecht komt. Geldt dus $12 = 13$?

Opgave 5.
De (algemene) binomische formule is $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$, dus

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}\,a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2!}\,a^2 b^{n-2} + n\,ab^{n-1} + b^n.$$

Door deze formule voor $n = 1$ toe te passen krijgen we $a + b = a + b + 0 + \ldots + 0 + a + b = 2(a+b)$. Voor $a + b \neq 0$ geeft dit de conclusie $1 = 2$!

Opgave 6.
De vergelijking $3\sqrt{x} + x + 2 = 0$ wordt als volgt opgelost: $3\sqrt{x} = -x - 2 \Rightarrow 9x = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$. Deze kwadratische vergelijking heeft de oplossingen $x_1 = 4$ en $x_2 = 1$. Maar als we x_1 in de originele vergelijking invullen krijgen we $12 = 0$ en voor x_2 krijgen we $6 = 0$.
Hebben we aangetoond dat $12 = 6 = 0$?

Opgave 7.
Zij n een natuurlijk getal en $a \neq 0$. We bekijken de term $x^n - a^n$ en substitueren $y := x/a$. Dan geldt $x = ay$ en $x^n - a^n = a^n(y^n - 1)$. Verder is $x - a = a(y-1)$ en dus $a^{n-1}(x-a) = a^n(y-1)$. We weten dat $y - 1$ en deler van $y^n - 1$ is (het quotiënt is $y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + y + 1$), daarom is $a^{n-1}(x-a) = a^n(y-1)$ een deler van $a^n(y^n - 1) = x^n - a^n$.
We vullen nu de speciale waarden $a = 2$, $x = 3$ en $n = 3$ in. Dit geeft $x^n - a^n = 19$ en $a^{n-1}(x-a) = 4$, dus is 4 een deler van 19. In het bijzonder is 19 geen priemgetal!

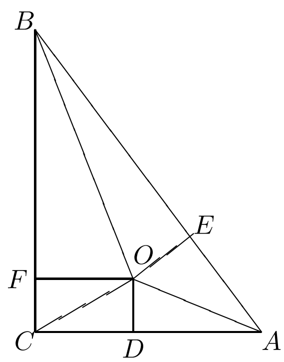
$ab - a^2 > b^2 - a^2$, anders geschreven: $a(b-a) > (b+a)(b-a)$. Omdat $a \neq b$ mogen we door $b-a$ delen en krijgen zo $a > b + a$. Met $a > b$ volgt hieruit $a > 2b$.
Dit proces kunnen we natuurlijk herhalen en krijgen zo $a > 2^n b$, voor elke $n \in \mathbb{N}$, dus is a groter dan elk positief getal!

Opgave 9.
We bewijzen dat getallen niet veranderen als we hun cijfers verruilen.
Om het bewijs overzichtelijk te houden bewijzen we dit voor getallen van drie cijfers, het algemeen geval werkt analoog. Zij $N = 100a + 10b + c$, dus het getal dat we decimaal als abc noteren en zij $N' = 100a' + 10b' + c'$. De sommen der cijfers zijn $s = a + b + c$ voor N en $s' = a' + b' + c'$ voor N'. Het verschil $N - N'$ is $N - N' = 100(a - a') + 10(b - b') + (c - c')$, dus is de som der cijfers van $N - N'$ gelijk aan $(a - a') + (b - b') + (c - c')$. Maar dit is juist $(a + b + c) - (a' + b' + c') = s - s'$.
Als $s = s'$ is, bijvoorbeeld als N en N' dezelfde cijfers in verschillende volgordes hebben, is dus $N - N'$ een getal met cijfersom 0 en is dus 0. Dus zijn N en N' gelijk.

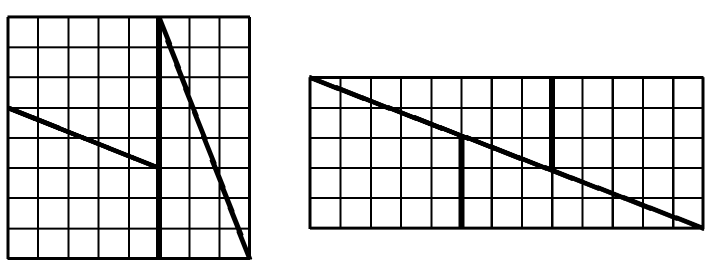
Huiswerk (in te leveren tot 13 februari 2006)

Opgave 10.
Op de markt staat een boer met een kist met twee zakken aardappels, 150 stuk in elke zak. Voor onbekende redenen heeft de boer besloten de aardappels uit de eerste zak met 10 stuk voor een gulden (de goede oude tijden) te verkopen, en de aardappels uit de tweede zak met 15 stuk voor een gulden. Op deze manier zou hij 15 gulden voor de eerste zak en 10 gulden voor de tweede zak, dus 25 gulden innemen.
In de koffiepauze neemt zijn zoon de boel over, maar hij vindt dat zijn vader het veel te ingewikkeld doet. Hij beslist dat het even goed is als hij aan elke klant 10 aardappels uit de eerste zak en 15 aardappels uit de tweede zak geeft en hiervoor twee gulden vraagt. Daarom gooit hij de twee zakken bij elkaar en verkoopt nu 25 aardappels voor twee gulden. Op deze manier gaat hij $300/25 \cdot 2 = 24$ gulden verdienen.
Waar is de ene gulden gebleven?

Opgave 11.
We tonen aan dat in een rechthoekige driehoek de schuine zijde even lang is als een rechthoekzijde!
In de rechthoekige driehoek ABC tekenen we de lijn die de hoek in B in twee gelijke hoeken deelt en de lijn loodrecht op de zijde CA die door het middelpunt D van deze zijde gaat. Deze twee lijnen snijden elkaar in een punt O. Vanuit het punt O tekenen we de loodrechte lijnen naar de zijden AB en BC en noemen deze E en F. De driehoeken FOB en EOB zijn congruent omdat ze rechthoekig zijn, een gemeenschappelijke zijde en bij B dezelfde hoek hebben. Ook de rechthoekige driehoeken CDO en ADO zijn congruent omdat ze een gemeenschappelijke zijde hebben en ook de zijden CD en DA even lang zijn. Hieruit volgt dat ook de rechthoekige driehoeken COF en AOE congruent zijn, omdat twee van hun zijden even lang zijn. Omdat BF gelijk is aan BE en FC gelijk is aan EA is dus de zijde BC gelijk aan de zijde BA.



Opgave 12.
De volgende schets laat zien dat een vierkant van 8×8 en een rechthoek van 5×13 even groot zijn.



Als we de vierkant langs de aangegeven lijnen in vier delen knippen kunnen we deze weer zo aan elkaar zetten dat we de rechthoek rechts krijgen. Je kunt nagaan dat de vier delen inderdaad dezelfde zijn.
Wat gaat hier mis?

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/orientatie_06/problem.html