De Fibonacci rij

De *Fibonacci rij* $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is gedefinieerd door: $F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_{n+1} := F_{n-1} + F_n$ voor $n \geq 1$.

Opgave 91.
Toon aan dat

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n .$$

Opgave 92.
Zij $\alpha := \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ en $\beta := 1 - \alpha = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Bewijs Binet's formule:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$$

en concludeer dat $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$.
(Hint: Er geldt $\alpha + \beta = 1$ en $\alpha \cdot \beta = -1$.)

Opgave 93.
Bewijs de volgende identiteiten voor de Fibonacci rij $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\text{(i)} \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1, \qquad \text{(ii)} \sum_{i=0}^{n} F_{2i+1} = F_{2n+2}, \qquad \text{(iii)} \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1,$$

$$\text{(iv)} \sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}, \qquad \text{(v)} \sum_{i=1}^{2n-1} F_i F_{i+1} = F_{2n}^2.$$

Opgave 94. Uitdaging
Toon aan dat $m \mid n \Rightarrow F_m \mid F_n$ en bewijs dat $\mathrm{ggd}(F_m, F_n) = F_{\mathrm{ggd}(m,n)}$.

Huiswerk (in te leveren tot 29 mei 2006)

Opgave 95.
Bewijs de volgende identiteiten voor de Fibonacci rij $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{rlrl} \text{(i)} & F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n, & \text{(ii)} & F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}, \\ \text{(iii)} & F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1} = F_{2n}, & \text{(iv)} & F_n^2 + 2F_{n-1}F_n = F_{2n}, \\ \text{(v)} & F_nF_{n+1} - F_{n-2}F_{n-1} = F_{2n-1}, & \text{(vi)} & F_{n-1}F_n - F_{n-2}F_{n+1} = (-1)^n. \end{array}$$

(Hint: Soms zal opgave 91 nuttig blijken.)

Opgave 96.
Laat zien dat $F_n^3 + F_{n+1}^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$.

Opgave 97.
Toon aan dat

$$F_n = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1-i}{i} = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \dots.$$