

Grafen

Definities:

- (i) Een *graaf* bestaat uit een verzameling van hoekpunten en een verzameling van ribben, waarbij een ribbe door twee verschillende hoekpunten gegeven is (die door deze ribbe verbonden zijn).
- (ii) Een *pad* is een rij van ribben, waarbij twee naburige ribben (minstens) één hoekpunt gemeenschappelijk hebben.
- (iii) Een graaf heet *samenhangend* als er tussen elk paar van hoekpunten een pad bestaat.
- (iv) De *graad* van een hoekpunt van een graaf is het aantal ribben dat dit hoekpunt met een hoekpunt van de graaf verbindt, d.w.z. het aantal ribben uitgaande van dit hoekpunt. De twee einden van een lus van een hoekpunt naar zich zelf worden hierbij apart geteld.

Opgave 98.

Een *Euler pad* in een graaf G is een pad die elke ribbe van G precies één keer bevat. Een *Euler circuit* is een gesloten Euler pad, d.w.z. een Euler pad waarbij het eindpunt met het beginpunt overeen komt.

Bewijs de volgende stelling:

Een samenhangende graaf G heeft een Euler circuit dan en slechts dan als alle hoekpunten van G even graad hebben,

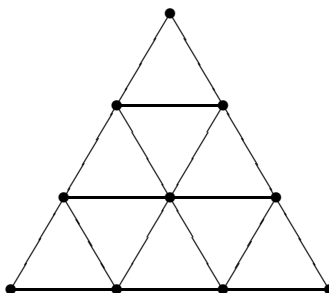
G heeft een Euler pad die geen circuit is dan en slechts dan als precies twee hoekpunten oneven graad hebben. In dit geval zijn de hoekpunten van oneven graad de begin- en eindpunten van het Euler pad.

Gebruik hiervoor (bijvoorbeeld) de volgende stappen:

- (i) De som van de graden van de hoekpunten van G is gelijk aan het dubbele van het aantal ribben van G . In het bijzonder is er een even aantal oneven hoekpunten.
- (ii) Als G een Euler pad heeft, dan heeft G of 0 of 2 oneven hoekpunten.
- (iii) Stel G heeft geen oneven hoekpunten. Als P een pad in G is die geen ribben twee keer bevat en die niet voortgezet kan worden (omdat aan zijn eindpunt alle ribben al gebruikt zijn), dan is P een gesloten pad.
- (iv) Als G geen oneven hoekpunten heeft, dan heeft G een Euler circuit.
- (v) Als G precies twee oneven hoekpunten heeft, dan heeft G een Euler pad.

Opgave 99.

Vind een Euler circuit in de volgende graaf:

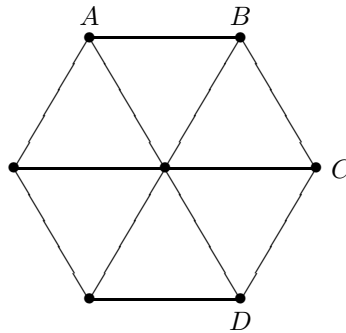


Opgave 100.

Het volgende plaatje geeft de wegen in een rozentuin aan. Natuurlijk wil je graag alle rozen zien en daarom alle wegen (ribben) minstens één keer langs lopen. Uit Opgave 98 kunnen we concluderen dat er geen Euler pad in deze tuin bestaat en dat dus sommige wegen meermaals bewandeld moeten worden.

Wat is de lengte van het kortste circuit dat alle wegen bevat en in A begint en eindigt (als elke ribbe bijvoorbeeld $20m$ lang is)? Geef zo'n circuit aan.

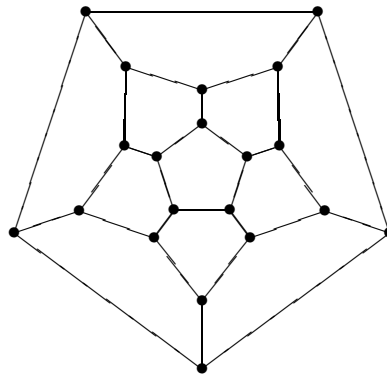
Wat is de lengte van het kortste pad langs alle wegen dat in A begint en in B eindigt? Hoe zit het met paden van A naar C of D ?



Opgave 101.

Een *Hamilton pad* in een graaf G is een pad die ieder hoekpunt van G precies één keer bevat. Een *Hamilton circuit* is een Hamilton pad die naar het uitgangspunt terug komt.

Vind een Hamilton circuit in de dodecaëder-graaf die in het figuur hieronder afgebeeld is.



Opgave 102.

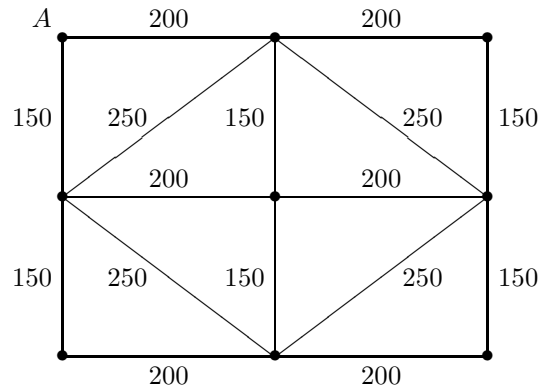
Een man heeft een wolf, een geit en een kool. Hij moet een rivier oversteken, maar in de boot is alleen maar plaats voor één van zijn bezittingen (en geen van deze kan zonder hem varen). Om voor de hand liggende redenen kunnen de paren wolf-geit en geit-kool niet in zijn afwezigheid aan een oever blijven.

Hoe vaak moet hij oversteken om alles ongedeerd naar het andere oever te brengen?

Huiswerk (in te leveren tot 12 juni 2006)

Opgave 103.

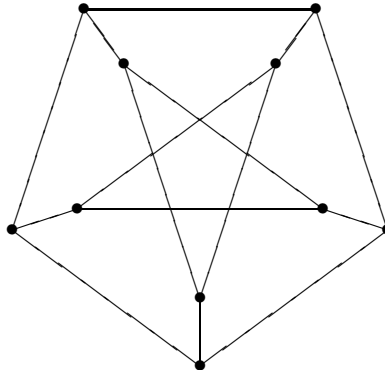
De postbode moet de wegen van de onderstaande plattegrond afhandelen. De lengtes van de wegen zijn aan de ribben aangegeven.



Hoe lang is het kortste pad, als hij in willekeurige hoekpunten mag beginnen en eindigen? Hoe lang is het kortste circuit dat in A begint en eindigt?

Opgave 104.

In het figuur hieronder zie je de *Petersen graaf* die geen *platte graaf* is, omdat hij niet zo te tekenen is, dat geen ribben elkaar snijden.



- Laat zien: Als je in de Petersen graaf een hoekpunt en de daarmee verbonden ribben verwijdert, heeft de zo verkregen graaf een Hamilton circuit.
- Vind een Hamilton pad in de Petersen graaf.
- Ga na dat de Petersen graaf geen Hamilton circuit bevat.

Opgave 105.

Drie paren van man en vrouw moeten een rivier oversteken. Er is een boot dat alleen maar met één of twee personen kan varen. Een kleine complicatie zit in het feit dat de mannen erg jaloers zijn en niet toelaten, dat hun partner in hun afwezigheid een andere man zou kunnen ontmoeten (dit geldt zelfs voor het in/uitstappen en ook als de vrouw van de andere man erbij is).

Hoe kan deze gezelschap naar het andere oever komen?

(Hint: Het lukt met elf keer oversteken.)