Inductie

Het *inductie principe* zegt:

> Als een uitspraak $U(0)$ waar is en als $U(n) \Rightarrow U(n+1)$ dan is $U(n)$ waar voor alle $n \in \mathbb{N}$. Soms is de volgende (equivalente) versie handig: Als een uitspraak $U(n_0)$ waar is en als $\{U(k) \mid n_0 \leq k \leq n\} \Rightarrow U(n+1)$ dan is $U(n)$ waar voor alle $n \in \mathbb{Z}$ met $n \geq n_0$.

Opgave 83.

We definiëren een rij (a_n) door $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \sqrt{2}^{a_n}$, dus $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$ enz. Toon aan dat de rij (a_n) stijgend is en dat $a_n < 2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Concludeer dat (a_n) een convergente rij is en bepaal de limiet.

Opgave 84.
Laat zien dat $3^{n+1} \mid 2^{3^n} + 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 85.
Zij $p \in \mathbb{Z}$ oneven en laten x_1, x_2 de nulpunten van de veelterm $x^2 + px - 1$ zijn. Definieer $y_n := x_1^n + x_2^n$. Toon aan dat $y_n \in \mathbb{Z}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en dat $\mathrm{ggd}(y_n, y_{n+1}) = 1$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 86.
Gegeven is een graaf met $2n$ punten en $n^2 + 1$ ribben. Toon aan dat er een drietal punten bestaat die paarsgewijs verbonden zijn.
Verzin ook een tegenvoorbeeld waaruit blijkt dat dezelfde uitspraak voor grafen met $2n$ punten en n^2 ribben niet noodzakelijk waar is.

Opgave 87.
Een algemene n-hoek is een samenhangende graaf met n punten en n ribben, zo dat ieder punt met precies twee andere punten door een ribbe verbonden is en geen ribben elkaar snijden. In het bijzonder hoeft een algemene n-hoek niet convex te zijn. Toon voor $n \geq 4$ de volgende beweringen aan:

(i) Er bestaat een diagonaal (een verbinding vaan twee punten die niet door een ribbe verbonden zijn), die helemaal binnen de n-hoek ligt.

(ii) De n-hoek kan met behulp van diagonalen, die binnen de n-hoek liggen en elkaar niet snijden, in driehoeken onderverdeeld worden. Zo iets noemen we een *triangulatie*.

(iii) De punten in de getrianguleerde n-hoek kunnen met drie kleuren zodanig gekleurd worden, dat twee punten die door een ribbe of door een diagonaal verbonden zijn verschillende kleuren hebben.

(iv) De driehoeken in de getrianguleerde n-hoek kunnen met twee kleuren zodanig gekleurd worden, dat twee driehoeken die een gemeenschappelijke diagonaal hebben verschillende kleuren hebben.

Huiswerk (in te leveren tot 22 mei 2006)

Opgave 88.
Voor $n \in \mathbb{N}$ zijn de functies $f(n)$ en $g(n)$ gedefinieerd door

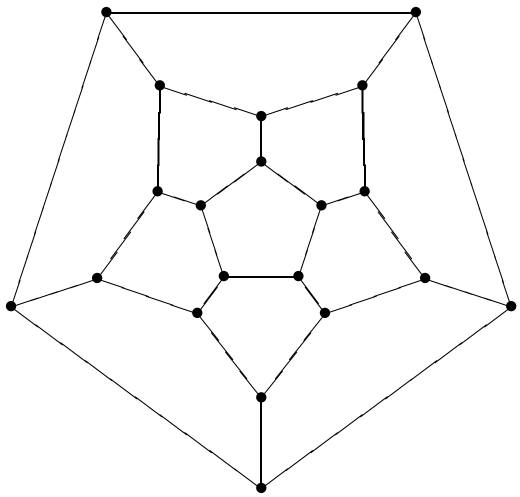
$$f(n) := \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n};$$

$$g(n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Toon aan dat $f(n) = g(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 89.
Zij x een reëel getal met $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Toon aan dat $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 90. (Formule van Euler)
Zij G een *samenhangende platte graaf* met P hoekpunten en R ribben. In een platte graaf mogen de ribben elkaar niet snijden (behalve in de hoekpunten) maar het is toegestaan dat twee hoekpunten door meer dan één ribbe verbonden zijn (die dan krom moeten zijn). Dat G samenhangend is betekent dat er van elke hoekpunt een pad (via de ribben) naar elke andere hoekpunt bestaat. Het aantal vlakken die door de ribben van G ingesloten zijn noemen we V, waarbij ook het buitengebied als een vlak geldt. In het plaatje zie je bijvoorbeeld de graaf van de dodecaëder met $P = 20$, $R = 30$ en $V = 12$.



Toon aan: Voor de aantallen van hoekpunten, ribben en vlakken geldt de relatie

$$P - R + V = 2.$$

(Hint: Inductie over het aantal ribben.)

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/orientatie_06/problem.html