Kleuringen

Opgave 36.
Een (gewoon 8×8) schaakbord kan heel eenvoudig met 32 dominostenen overdekt worden, als iedere steen precies twee velden groot is.
Van ons mooi houten schaakbord heeft een bever twee diagonaal tegenover liggende hoeken afgeknaagd. Kunnen we het zo mishandelde schaakbord met 31 dominostenen overdekken?

Opgave 37.
Een toren staat in een hoek van een schaakbord. Kan hij (met legale zetten van een toren) een pad lopen dat elk veld van het schaakbord precies één keer overdekt en in de diagonaal tegenover liggende hoek eindigt?

Opgave 38.
Zij n een oneven getal en zij A een *symmetrische* $n \times n$-matrix, d.w.z. $A = A^{tr}$ of te wel $A_{ij} = A_{ji}$ voor alle $1 \leq i, j \leq n$. Stel dat iedere rij en iedere kolom van A een permutatie van de getallen $1, 2, \ldots, n$ bevat (zo als bij een *Sudoku*).
Laat zien dat ook de diagonaal ieder van de getallen van 1 t/m n bevat.

Opgave 39.
Kunnen we 250 bakstenen van de vorm $10cm \times 10cm \times 40cm$ in een kist van $1m \times 1m \times 1m$ pakken?

Opgave 40.
Laat zien dat voor even getallen m en n een $m \times n$ rechthoek door 4×1-dominostenen en hooguit een enkele 2×2-steen overdekt kan worden.

Opgave 41.
Laat zien dat een $a \times b$ rechthoek slechts dan door $1 \times n$-tegels overdekt kan worden als n een deler van a of van b is. (In dit geval is zo'n overdekking natuurlijk eenvoudig te vinden.)

Opgave 42.
Probeer een 8×8 schaakbord met 21 tegels van de vorm 1×3 en één 1×1-tegel te overdekken. Hiervoor is het handig, eerst de mogelijke plekken voor de 1×1-tegel te bepalen.
Probeer hetzelfde voor een 4×4 bord (met vijf 1×3-tegels), voor een 5×5 bord (met 8 tegels) en voor een 7×7 bord (met 16 tegels).

Opgave 43.
De roosterpunten in het vlak zijn de punten (m, n) met $m, n \in \mathbb{Z}$. Stel dat de roosterpunten met twee kleuren gekleurd zijn. Laat zien dat er een rechthoek (met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen) bestaat, dat hoekpunten van dezelfde kleur heeft.
Kan je hetzelfde ook voor een kleuring van de roosterpunten met drie kleuren bewijzen?

Opgave 44. Uitdaging
De positieve natuurlijke getallen worden zwart en wit gekleurd volgens de volgende twee regels:

(i) De som van twee verschillend gekleurde getallen is zwart.

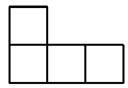
(ii) Het product van twee verschillend gekleurde getallen is wit.

Welke kleur heeft het product van twee wit gekleurde getallen? Kan je alle kleuringen bepalen die aan de twee regels voldoen?

Huiswerk (in te leveren tot 13 maart 2006)

Opgave 45.
Een rechthoekige vloer is bedekt door 2×2-tegels en 1×4-tegels. Een van de tegels wordt fataal beschadigd en moet worden vervangen. Helaas is er alleen maar een tegel van de andere soort beschikbaar. Is het mogelijk de vloer door een nieuw arrangement van de tegels weer volledig te overdekken?

Opgave 46.
Een L-tetromino ziet er zo uit:



Van een $n \times n$ schaakbord worden de vier hoeken afgeknipt. Voor welke waarden van n kan dit bord met L-tetromino's overdekt worden?

Opgave 47.
In een $3\times3\times3$ kubus ontbreekt één eenheidskubus. Voor welke posities van de ontbrekende eenheidskubus kan de figuur uit 13 stenen van de vorm $2 \times 1 \times 1$ opgebouwd worden?

Webpagina: http://www.math.ru.nl/∼souvi/orientatie_06/problem.html