Laden principe I

Opgave 13.
Geef een bewijs van het ***laden principe:***
Als $kn + 1$ objecten over n vakken verdeeld worden, bestaat er één vak waarin tenminste $k + 1$ objecten terecht komen.

Opgave 14.
In een lade heb ik drie paren rode sokken, zeven paren zwarte sokken en vier paren witte sokken (yak!). Hoeveel sokken moet ik in het donker uit de la trekken om er zeker van te zijn dat ik een passend paar heb? Hoeveel sokken moet ik (als wiskunde docent) trekken om zeker een paar verschillend gekleurde sokken te hebben?

Opgave 15.
Laat zien dat er in een zaal met $n \geq 2$ personen altijd twee personen zijn die hetzelfde aantal andere personen in de zaal kennen. Neem hierbij aan dat kennissen steeds wederzijds zijn.

Opgave 16.
Laat zien dat er onder 12 verschillende getallen tussen 10 en 99 steeds twee zijn die een verschil van de vorm xx (dus een van 11, 22, $\ldots$, 88) hebben.

Opgave 17.
Zij $1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, \ldots$ de Fibonacci rij modulo 10, d.w.z. $F_1 = F_2 := 1$, $F_{n+2} := (F_n + F_{n+1}) \bmod 10$. Laat zien dat de rij periodiek wordt en dat er geen voorperiode is, d.w.z. dat de periode al met $F_1, F_2, \ldots$ begint.

Opgave 18.
Laat zien dat de decimale ontwikkeling van een eenvoudige breuk $\frac{a}{b}$ (d.w.z. een breuk met $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$) een periode van lengte $\leq (b - 1)$ heeft.

Opgave 19.
Laten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (niet noodzakelijk verschillende) gehele getallen zijn. Toon aan dat er altijd een deelverzameling van deze getallen bestaat, waarvan de som door n deelbaar is.

Opgave 20.
In de kroeg zitten $ab + 1$ mannen. Laat zien dat er of een groep van $a + 1$ mannen is die familie van elkaar zijn (d.w.z. iedereen is met iedereen verbonden door een keten van vader-zoon-relaties) of er is een groep van $b + 1$ mannen waarin geen enkele familie van een van de anderen is.

Opgave 21.
In een 8×8 matrix zijn positieve gehele getallen ingevuld. In een zet mag je in een 3×3 of 4×4 deelmatrix bij elk element 1 optellen. Kun je in een (eindig) aantal zetten bereiken dat alle elementen van de matrix veelvouden van 10 zijn?

Opgave 22. Uitdaging
Een internationale schaakclub heeft 1957 leden uit zes verschillende landen. De lidmaatschapsnummers zijn gewoon de getallen van 1 t/m 1957. Laat zien dat er minstens één lid is wiens lidmaatschapsnummer óf de som van de nummers van twee andere leden uit zijn land óf het dubbele van het nummer van een der leden uit zijn land is.

Huiswerk (in te leveren tot 20 februari 2006)

Opgave 23.
Zij $n \in \mathbb{N}$. Laat zien dat er een element in de Fibonacci rij bestaat dat op n nullen eindigt.

Opgave 24.
Zij N een natuurlijk getal dat geen veelvoud van 2 of 5 is. Laat zien dat er een veelvoud van N bestaat dat uit louter 1en bestaat, dus van de vorm $11\ldots1$ is.

Opgave 25.
Zij a_n het aantal getallen in de rij $2^1, 2^2, \ldots, 2^n$ die met het cijfer 1 beginnen. Laat zien dat

$$^{10}\log(2) - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} < {}^{10}\log(2).$$

In het bijzonder is dus $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = {}^{10}\log(2) \approx 0.30103$.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/orientatie_06/problem.html