Laden principe II

Opgave 26.
Laat zien dat er in een groep van zes personen altijd drie personen zijn die of elkaar onderling alle kennen of onderling helemaal onbekend zijn. Hierbij zijn kennissen steeds wederzijds.

Opgave 27.
De lijn met vergelijking $y = \alpha x$ met $\alpha \notin \mathbb{Q}$ gaat door het punt $(0, 0)$ maar door geen andere punt van het rooster $\mathbb{Z}^2 := \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Ga na dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een roosterpunt bestaat, die dichter dan ε bij de lijn ligt. Kan je bewijzen dat er zelfs oneindig veel van dit soort roosterpunten zijn?

Opgave 28.
Gegeven zijn $n + 1$ gehele getallen ≥ 2. Stel dat in de ontbinding van deze getallen in priemdelers slechts n priemgetallen voorkomen. Toon aan dat er een deelverzameling van de getallen is, waarvan het product een zuiver kwadraat is.

Opgave 29.
In een gelijkzijdige driehoek met zijden van lengte 2 worden gaten geponst.

(i) Als er 5 gaten zijn, zijn er twee met afstand ≤ 1.

(ii) Nu zijn er 17 gaten. Geef een bovengrens voor de minimale afstand tussen twee gaten.

Opgave 30.
Op een vierkant van lengte 1 zitten 51 (puntsvormige) vliegen. Laat zien dat met een cirkel van straal $\frac{1}{7}$ tenminste drie vliegen overdekt kunnen worden.

Opgave 31.
In een kamer van $10m^2$ leg je 6 tapijten met een oppervlakte van telkens $3m^2$ (maar wel van willekeurige vorm). Laat zien dat twee van de tapijten tenminste $0.5m^2$ overlappen.

Opgave 32. Uitdaging
De hoekpunten van een regelmatige zevenhoek zijn wit of zwart gekleurd. Laat zien dat er voor elke kleuring drie hoekpunten van dezelfde kleur zijn die een gelijkbenige driehoek vormen. Hoe zit het met een regelmatige achthoek? Kan je ook het algemeen geval van een regelmatige n-hoek met $n \geq 5$ behandelen?

Huiswerk (in te leveren tot 6 maart 2006)

Opgave 33.
Van 17 wiskundigen correspondeert iedereen met iedereen. Elk paar discussieert over precies één van de drie onderwerpen *Voorlaatste stelling van Fermat*, *Hoofdvermoeden van de Calculus* en *Tegenspraken uit het Ongerijmde*. Laat zien dat er tenminste drie wiskundigen zijn die het onderling over hetzelfde onderwerp hebben.

Opgave 34.
Laat zien dat er getallen $a, b, c \in \mathbb{Z}$ bestaan met $|a|, |b|, |c| < 10^6$ en $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, zo dat

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}.$$

Opgave 35.
In een cirkel van straal 1 zijn zeven gaten geponst die paarsgewijs afstand ≥ 1 hebben. Laat zien dat één van de zeven gaten in het middelpunt van de cirkel zit.

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/orientatie_06/problem.html