Ongelijkheden

In deze les zijn alle getallen positieve reële getallen.

Opgave 58.
Toon voor twee getallen a, b de volgende keten van ongelijkheden aan:

$$\min(a,b) \leq \left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^{-1} \left(=\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b).$$

In woorden heet dit: minimum $\leq$ harmonisch gemiddelde $\leq$ meetkundig gemiddelde $\leq$ rekenkundig gemiddelde $\leq$ kwadratisch gemiddelde $\leq$ maximum.

Opgave 59.
Toon aan:

(i) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$.

(ii) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$.

(iii) Als $a+b+c=1$, dan is $ab+bc+ca \leq \frac{1}{3}$.

Opgave 60.
Neem aan dat $a_1a_2\ldots a_n = 1$. Toon aan dat $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n$.

Opgave 61. (Cauchy-Schwarz)
Bewijs de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz (of Cauchy-Bunyakowski):

$$(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+\ldots+b_n^2).$$

Toon aan dat gelijkheid geldt dan en slechts dan als $a_1/b_1 = \ldots = a_n/b_n = c$, dus als de vectoren $(a_1,\ldots,a_n)$ en $(b_1,\ldots,b_n)$ lineair afhankelijk zijn.
(Hint: Kijk bijvoorbeeld naar de som $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_ib_j - a_jb_i)^2$.)

Opgave 62.
Bewijs de volgende ongelijkheden:

(i) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$;

(ii) $(a_1+\ldots+a_n)(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}) \geq n^2$.

(Merk op: Uit (ii) resulteert de ongelijkheid $\left(\frac{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ tussen het harmonisch gemiddelde en het rekenkundig gemiddelde van n getallen.)

Opgave 63. Uitdaging
Toon de ongelijkheid tussen het meetkundig gemiddelde en het rekenkundig gemiddelde van n getallen aan, d.w.z. laat zien dat $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

Huiswerk (in te leveren tot 27 maart 2006)

Opgave 64.
Toon aan dat

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$$

dus het rekenkundig gemiddelde is niet groter dan het kwadratisch gemiddelde.
(Hint: Een mogelijke aanpak is de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz.)

Opgave 65.
Laten $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ reële getallen zijn. Laat zien dat onder alle permutaties $c_1, \ldots, c_n$ van de reële getallen $b_1, \ldots, b_n$ de som $a_1c_1 + \ldots + a_nc_n$ maximaal is als $c_1 \geq \ldots \geq c_n$ en minimaal als $c_1 \leq \ldots \leq c_n$.

Opgave 66.
De driehoeksongelijkheid zegt dat in een driehoek een zijde altijd korter is dan de som van de twee andere zijden. Toon aan dat de volgende formuleringen voor drietallen van positieve reële getallen equivalent zijn:

(i) $a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b.$

(ii) $a > |b - c|, \quad b > |c - a|, \quad c > |a - b|.$

(iii) $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) > 0.$

(iv) Er bestaan $x, y, z > 0$ met $a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y.$

Webpagina: http://www.math.ru.nl/~souvi/orientatie_06/problem.html