

## Les 6 Variantie-analyse (ANOVA)

Met de  $\chi^2$ -toetsen zijn we nagegaan of verschillende steekproeven bij dezelfde verdeling horen. Vaak komt men echter ook de vraag tegen of meerdere verdelingen hetzelfde gemiddelde hebben, bijvoorbeeld als het om verschillende behandelingen van een zekere soort groente gaat. Voor twee steekproeven hebben we hier al naar gekeken, dit konden we met een toets op het verschil van de twee gemiddelden oplossen. Hiervoor hadden we onder de veronderstelling dat de twee steekproeven uit verdelingen met dezelfde variantie komen, gekeken naar de verdeling van de schatter

$$T := \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{s} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

waarbij  $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$  de gepoolde variantie van de steekproeven was.

Net zo als we met de  $\chi^2$ -toets een veralgemening van het vergelijken van twee relatieve frequenties naar relatieve frequenties voor  $k$  klassen hebben gevonden, gaan we nu de toets op gelijkheid van gemiddelden op meer dan twee steekproeven uitbreiden.

Het idee hierbij is, de totale variantie van de steekproeven te analyseren en deze te verdelen in de variantie *binnen* de enkele steekproeven en de variantie *tussen* de steekproeven. Daarom heet deze methode dan ook *variantie-analyse* of kort *ANOVA* (voor **AN**alysis **Of** **VA**riance).

We zullen ons in deze cursus beperken tot het eenvoudigste geval van de variantie-analyse, namelijk het geval van een enkele parameter die gevarieerd wordt en aanleiding tot de verschillende steekproeven geeft. Hetzelfde principe laat zich op meerdere factoren veralgemenen, waarbij men ook op mogelijke interactie tussen de verschillende factoren moet letten. Maar algemeen zijn hiervoor weinig nieuwe ideeën nodig, de hele analyse wordt alleen maar technisch ingewikkelder en we laten deze problemen hier daarom buiten beschouwing.

### 6.1 Variantie binnen en tussen steekproeven

We veronderstellen, dat we  $k$  steekproeven hebben die afkomstig zijn van normale verdelingen met dezelfde (onbekende) variantie  $\sigma^2$  en met (onbekende) verwachtingswaarden  $\mu_1, \dots, \mu_k$ . De  $i$ -de steekproef heeft omvang  $n_i$  en zijn elementen worden met  $x_{i1}, \dots, x_{in_i}$  genoteerd. De totale omvang van alle steekproeven is  $n := n_1 + \dots + n_k$ .

De nulhypothese luidt dat de  $k$  normale verdelingen die de steekproeven voortbrengen alle hetzelfde zijn. Omdat we veronderstellen, dat de verdelingen sowieso dezelfde variantie hebben, moeten we alleen maar toetsen of de verwachtingswaarden  $\mu_1, \dots, \mu_k$  hetzelfde zijn, de nulhypothese  $H_0$  is dus:

$$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_k.$$

Het idee achter de aanname dat alle steekproeven een gemeenschappelijke variantie  $\sigma^2$  hebben ligt in de veronderstelling dat de waarden  $x_{ij}$  van de vorm  $x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$  zijn, waarbij de  $\varepsilon_{ij}$  toevallige afwijkingen van het gemiddelde zijn die onafhankelijk van de steekproef optreden.

We berekenen de steekproefgemiddelden  $\bar{x}_i$  en het gemiddelde  $\bar{x}$  en *gros* (d.w.z. het gemiddelde over alle steekproeven) zo als we dat altijd hebben gedaan:

$$\bar{x}_i := \frac{1}{n_i} \sum_j x_{ij} \quad \text{en} \quad \bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i,j} x_{ij} = \sum_i \frac{n_i}{n} \bar{x}_i.$$

De totale kwadratische afwijking

$$v := \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

tussen alle elementen van de steekproeven en het gemiddelde  $\bar{x}$  heeft nu twee bronnen:

- (1) de kwadratische afwijkingen

$$v_i := \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$$

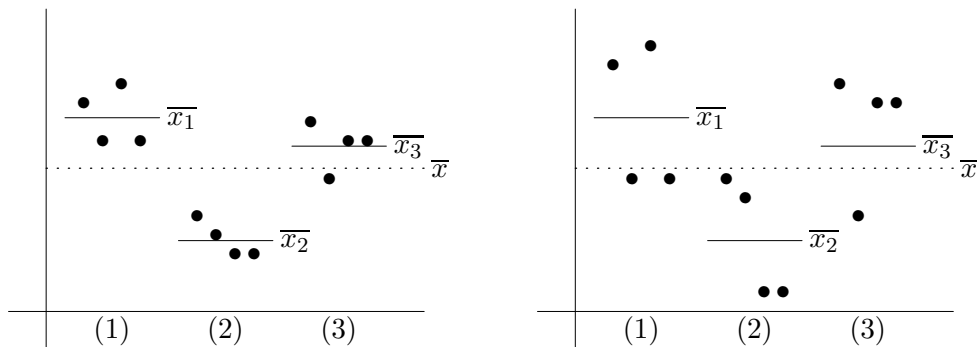
*binnen* de enkele steekproeven

- (2) de kwadratische afwijking

$$\sum_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2.$$

*tussen* de steekproeven.

Het idee achter de opsplitsing van de kwadratische afwijking in afwijkingen binnen en tussen de steekproeven is in de plaatjes in Figuur 17 te zien:



Figuur 17: Steekproeven met kleine (links) en grote (rechts) variantie binnen de steekproeven

In beide plaatjes zien we 3 steekproeven met telkens 4 waarden en de steekproefgemiddelden  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  zijn in beide gevallen hetzelfde.

In het linkerplaatje liggen de elementen van de steekproeven dicht bij de steekproefgemiddelden, daarom is de bijdrage van de kwadratische afwijkingen binnen de steekproeven in dit geval klein en de totale kwadratische afwijking wordt vooral veroorzaakt door de afwijkingen tussen de steekproefgemiddelden. Dit is sterke evidentie tegen de nulhypothese dat de gemiddelden van de verdelingen gelijk zijn.

In het rechterplaatje zijn de kwadratische afwijkingen binnen de steekproeven veel groter terwijl de kwadratische afwijkingen tussen de steekproefgemiddelden nog steeds hetzelfde zijn. Omdat in dit geval de kwadratische afwijkingen binnen de steekproeven relatief een groter deel bijdragen aan de totale kwadratische afwijking, zou men de nulhypothese moeilijker kunnen verwerpen, want de grote spreiding binnen de steekproeven maakt het plausibel, dat alle steekproeven door een verdeling met hetzelfde gemiddelde voortgebracht zijn.

Om het opsplitsen van de totale kwadratische afwijking binnen en tussen de steekproeven precies te analyseren, maken we weer gebruik van onze succesvolle aanpak, de elementen  $x_{ij}$  van de steekproeven als realisaties van onafhankelijke stochasten  $X_{ij}$  te zien. Ons uitgangspunt is hierbij, dat  $X_{ij} \in \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$  is, dus normaal verdeeld met gemiddelde  $\mu_i$  en variantie  $\sigma^2$ . De schatters  $\bar{X}_i$  voor de gemiddelden van de steekproeven en  $\bar{X}$  voor het gemiddelde over alle steekproeven zijn dan gegeven door

$$\bar{X}_i := \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad \text{en} \quad \bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} \bar{X}_i.$$

Er geldt nu

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X})^2 &= \sum_{i,j} ((X_{ij} - \bar{X}_i) + (\bar{X}_i - \bar{X}))^2 \\ &= \sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 + \sum_{i,j} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 + 2 \sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X}_i)(\bar{X}_i - \bar{X}) \\ &= \sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 + \sum_i n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 + 2 \sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X}_i)(\bar{X}_i - \bar{X}). \end{aligned}$$

We kunnen dit behoorlijk vereenvoudigen, want het blijkt dat de laatste term  $\sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X}_i)(\bar{X}_i - \bar{X})$  gelijk aan 0 is. Dit ziet men in door de som over  $j$  voor een vaste index  $i$  te bekijken:

$$\begin{aligned} \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)(\bar{X}_i - \bar{X}) &= (\bar{X}_i - \bar{X}) \left( \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i) \right) \\ &= (\bar{X}_i - \bar{X}) \left( \left( \sum_j X_{ij} \right) - n_i \bar{X}_i \right) = (\bar{X}_i - \bar{X}) (n_i \bar{X}_i - n_i \bar{X}_i) = 0. \end{aligned}$$

We hebben dus aangetoond dat

$$\sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X})^2 = \underbrace{\sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}_{V_b} + \underbrace{\sum_i n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2}_{V_i}$$

en dit is juist de gewenste opsplitsing van de kwadratische afwijking in afwijkingen *binnen* de steekproeven (genoteerd met  $V_b$ ) en tussen de steekproeven (genoteerd met  $V_t$ ).

We gaan nu de twee stochasten  $V_b$  ( $b$  voor **b**innen) en  $V_t$  ( $t$  voor **t**ussen) die zo als net uitgewerkt gegeven zijn door

$$V_b := \sum_{i,j} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \quad \text{en} \quad V_t := \sum_i n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

apart onderzoeken.

### Variantie binnen de steekproeven

We weten dat de schatter

$$S_i^2 := \frac{1}{n_i - 1} \sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

een zuivere schatter voor  $\sigma^2$  is, daarom is  $\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$  een zuivere schatter voor  $(n_i - 1)\sigma^2$ . De som  $V_b$  over de kwadratische afwijkingen *binnen* de steekproeven is dus een zuivere schatter voor  $\sum_i (n_i - 1)\sigma^2 = (n - k)\sigma^2$  en dus geldt:

$$S_b^2 := \frac{V_b}{n - k} \text{ is een zuivere schatter voor } \sigma^2.$$

### Variantie tussen de steekproeven

Om de variantie tussen de steekproeven te analyseren, schrijven we de stochasten  $X_{ij}$  voor de uitkomsten in de steekproeven als  $X_{ij} = \mu_i + E_{ij}$ , waarbij  $E_{ij}$  de afwijking van de verwachtingswaarde  $\mu_i$  van  $X_{ij}$  aangeeft. In het bijzonder is  $E_{ij}$  normaal verdeeld met verwachtingswaarde 0 en variantie  $\sigma^2$ .

Omdat de schatters  $\bar{X}_i$  verwachtingswaarde  $\mu_i$  hebben, heeft  $\bar{X}$  de verwachtingswaarde

$$\mu := \frac{1}{n} \sum_i n_i \mu_i.$$

We schrijven nu  $\mu_i = \mu + \alpha_i$ , dan zijn de  $\alpha_i$  juist de afwijkingen tussen de gemiddelden van de enkele verdelingen en het gemiddelde over alle verdelingen. In het bijzonder volgt uit  $\mu = \frac{1}{n} \sum_i n_i \mu_i$  dat

$$\sum_i n_i \alpha_i = \sum_i n_i (\mu_i - \mu) = \left( \sum_i n_i \mu_i \right) - n\mu = 0.$$

Voor de stochast  $V_t$  geldt nu:

$$\begin{aligned}
 V_t &= \sum_i n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 = \sum_i n_i ((\bar{X}_i - \mu_i) + (\mu - \bar{X}) + (\mu_i - \mu))^2 \\
 &= \sum_i n_i (\bar{X}_i - \mu_i)^2 + \sum_i n_i (\mu - \bar{X})^2 + \sum_i n_i (\mu_i - \mu)^2 \\
 &\quad + 2 \sum_i n_i (\bar{X}_i - \mu_i)(\mu - \bar{X}) + 2 \sum_i n_i (\bar{X}_i - \mu_i)(\mu_i - \mu) + 2 \sum_i n_i (\mu - \bar{X})(\mu_i - \mu) \\
 &= \sum_i n_i (\bar{X}_i - \mu_i)^2 + n(\mu - \bar{X})^2 + \sum_i n_i \alpha_i^2 \\
 &\quad + 2(\mu - \bar{X}) \underbrace{\sum_i n_i (\bar{X}_i - \mu_i)}_{=-n(\mu - \bar{X})} + 2 \sum_i n_i (\bar{X}_i - \mu_i) \alpha_i + 2(\mu - \bar{X}) \underbrace{\sum_i n_i \alpha_i}_{=0} \\
 &= \sum_i n_i (\bar{X}_i - \mu_i)^2 - n(\mu - \bar{X})^2 + \sum_i n_i \alpha_i^2 + 2 \sum_i n_i (\bar{X}_i - \mu_i) \alpha_i.
 \end{aligned}$$

Dit is nog geen echt handig resultaat, maar uiteindelijk willen we net als voor  $V_b$  een uitspraak bereiken, dat  $V_t$  een zuivere schatter voor een zekere parameter is. Hiervoor moeten we de verwachtingswaarde van  $V_t$  bepalen.

Uit  $E[\bar{X}_i] = \mu_i$  volgt

$$E[(\bar{X}_i - \mu_i)^2] = \text{Var}(\bar{X}_i) = \frac{1}{n_i^2} \text{Var}\left(\sum_j X_{ij}\right) = \frac{1}{n_i^2} \cdot n_i \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n_i}.$$

Met hetzelfde argument volgt uit  $E[\bar{X}] = \mu$  dat

$$E[(\bar{X} - \mu)^2] = \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Verder hebben we natuurlijk  $E[\bar{X}_i - \mu_i] = 0$ , daarom geldt:

$$\begin{aligned}
 E[V_t] &= \sum_i n_i E[(\bar{X}_i - \mu_i)^2] - n E[(\mu - \bar{X})^2] + \sum_i n_i \alpha_i^2 + 2 \sum_i n_i \alpha_i E[(\bar{X}_i - \mu_i)] \\
 &= \sum_i n_i \frac{\sigma^2}{n_i} - n \frac{\sigma^2}{n} + \sum_i n_i \alpha_i^2 = (k-1)\sigma^2 + \sum_i n_i \alpha_i^2.
 \end{aligned}$$

De nulhypothese luidt dat alle  $\mu_i$  hetzelfde zijn, dus dat alle  $\alpha_i = 0$  zijn, de alternatieve hypothese is, dat minstens een  $\alpha_i \neq 0$  is. Hiermee krijgen we voor de beschrijving van  $V_t$  de volgende twee mogelijkheden:

(A) Onder de aanname van de nulhypothese  $\alpha_i = 0$  voor alle  $i$  geldt:

$$S_t^2 := \frac{V_t}{k-1} \text{ is een zuivere schatter voor } \sigma^2.$$

(B) Onder de aanname van de alternatieve hypothese  $\alpha_i \neq 0$  voor een  $i$  geldt:

$$S_t^2 := \frac{V_t}{k-1} \text{ is een zuivere schatter voor } \sigma^2 + \frac{1}{k-1} \sum_i n_i \alpha_i^2 > \sigma^2.$$

Voor gegeven steekproeven berekenen we nu de concrete realisaties  $s_b^2$  en  $s_t^2$  van de schatters  $S_b^2$  en  $S_t^2$  voor  $\sigma^2$ , dus

$$s_b^2 := \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \quad \text{en} \quad s_t^2 := \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2.$$

Omdat onder de aanname van de nulhypothese  $S_b^2$  en  $S_t^2$  beide zuivere schatters voor  $\sigma^2$  zijn, kunnen we in dit geval verwachten dat  $s_b^2 \approx s_t^2$ . Andersom geeft een waarde  $s_t^2 \gg s_b^2$  evidentie tegen de nulhypothese.

Voordat we nader bekijken, hoe we de nulhypothese dat alle gemiddelden  $\mu_i$  hetzelfde zijn, kunnen toetsen, geven we nog een handige manier aan, hoe de grootheden  $s_b^2$  en  $s_t^2$  uit de steekproefwaarden  $x_{ij}$  berekend kunnen worden.

Hiervoor noteren we met

$$T := \sum_{i,j} x_{ij}$$

de som over alle waarden in de steekproeven en met

$$T_i := \sum_j x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in_i}$$

de som over alle waarden in de  $i$ -de steekproef.

Het idee dat we nu toepassen, zijn we al in de cursus *Kansrekening* tegen gekomen, toen hebben we namelijk ingezien dat voor de variantie  $Var(X)$  van een stochast  $X$  met verwachtingswaarde  $E[X]$  geldt, dat

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2.$$

Het rekenwerk van toen kunnen we nog een keer herhalen: Stel dat we waarden  $x_1, x_2, \dots, x_n$  met gemiddelde  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$  hebben. Voor de som  $t := \sum_i x_i$  geldt dan  $t = n \cdot \bar{x}$ . We berekenen nu

$$\begin{aligned} \sum_i (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_i x_i^2 - 2 \sum_i x_i \bar{x} + n \bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - 2\bar{x} \left( \sum_i x_i \right) + n \bar{x}^2 \\ &= \sum_i x_i^2 - 2\bar{x} n \bar{x} + n \bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2 = \sum_i x_i^2 - \frac{1}{n} t^2. \end{aligned}$$

Met deze berekening en de notatie van boven gaat men rechtstreeks na dat

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \left( \sum_{i,j} x_{ij}^2 \right) - \frac{T^2}{n} \\ v_b &= \sum_i \left( \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2 \right) = \sum_i \left( \left( \sum_j x_{ij}^2 \right) - \frac{T_i^2}{n_i} \right) = \left( \sum_{i,j} x_{ij}^2 \right) - \left( \sum_i \frac{T_i^2}{n_i} \right) \\ v_t &= \sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 = v - v_b = \left( \sum_i \frac{T_i^2}{n_i} \right) - \frac{T^2}{n}. \end{aligned}$$

Hiermee laten zich

$$s_b^2 = \frac{1}{n-k} v_b \quad \text{en} \quad s_t^2 = \frac{1}{k-1} v_t$$

eenvoudig uit de gegevens  $x_{ij}$  berekenen.

## 6.2 De $F$ -verdeling van Fisher en de $F$ -toets

Om de relatie tussen de schatters  $S_b^2$  en  $S_t^2$  preciezer te analyseren, zou men naar het verschil  $S_t^2 - S_b^2$  kunnen kijken, maar het blijkt dat dit verschil erg ingewikkelde eigenschappen heeft. Een betere keuze is de quotiënt van  $S_t^2$  en  $S_b^2$ , men kijkt dus naar de verdeling van de stochast

$$F := \frac{S_t^2}{S_b^2}.$$

In het geval van de nulhypothese verwacht men voor de realisatie  $f = \frac{s_t^2}{s_b^2}$  een waarde rond 1.

Uit Les 2 weten we dat  $\frac{k-1}{\sigma^2} S_t^2$  een  $\chi^2$ -verdeling met  $k - 1$  vrijheidsgraden heeft, deze noteren we met  $\chi_{k-1}^2$ . Evenzo heeft  $\frac{n-k}{\sigma^2} S_b^2$  een  $\chi^2$ -verdeling met  $n - k$  vrijheidsgraden die we met  $\chi_{n-k}^2$  aangeven. Hieruit volgt dat de verdeling van  $F$  gegeven is door

$$F = \frac{S_t^2}{S_b^2} = \frac{\frac{\chi_{k-1}^2}{k-1}}{\frac{\chi_{n-k}^2}{n-k}} = \frac{n-k}{k-1} \cdot \frac{\chi_{k-1}^2}{\chi_{n-k}^2}$$

en deze verdeling heet de *Fisher-verdeling* of *F-verdeling* met  $k - 1$  en  $n - k$  vrijheidsgraden.

Zo als net toegelicht is de  $F$ -verdeling (tot op constanten na) een quotiënt van  $\chi^2$ -verdeelde stochasten met  $k - 1$  en  $n - k$  vrijheidsgraden. Deze twee aantallen van vrijheidsgraden karakteriseren de  $F$ -verdeling en we noteren de  $F$ -verdeling met  $k - 1$  en  $n - k$  vrijheidsgraden met

$$F_{k-1, n-k} = \frac{S_t^2}{S_b^2} = \frac{n-k}{k-1} \cdot \frac{\chi_{k-1}^2}{\chi_{n-k}^2}.$$

In Figuur 18 zijn als voorbeelden de  $F$ -verdelingen  $F_{3,6}$  en  $F_{10,20}$  te zien. Hierbij heeft de verdeling  $F_{10,20}$  het hogere en iets meer rechts liggende maximum.

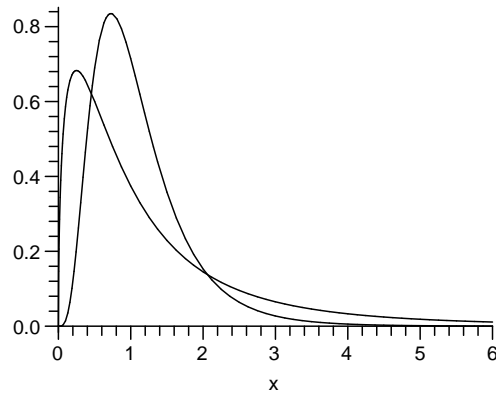
Voor de geïnteresseerde lezer vermelden we hier de expliciete dichtheidsfunctie  $f_{m,n}$  voor de  $F$ -verdeling  $F_{m,n}$  met  $m$  en  $n$  vrijheidsgraden. Het zal geen verrassing zijn, dat deze op een quotiënt van de dichtheidsfuncties van  $\chi^2$ -verdelingen lijkt:

$$f_{m,n}(x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{\frac{m}{2}} n^{\frac{n}{2}} x^{\frac{m}{2}-1} (n+mx)^{-\frac{m+n}{2}}$$

De verwachtingswaarde en variantie van  $F_{m,n}$  zijn

$$E[F_{m,n}] = \frac{n}{n-2} \quad \text{en} \quad \text{Var}(F_{m,n}) = \frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2)^2(n-4)}.$$

Voor  $n \rightarrow \infty$  geldt dat de verdeling  $F_{m,n}$  tegen de verdeling van  $\frac{\chi_m^2}{m}$  convergeert en voor  $m \rightarrow \infty$  gaat  $F_{m,n}$  tegen  $\frac{n}{\chi_n^2}$ .



Figuur 18:  $F$ -verdelingen  $F_{3,6}$  en  $F_{10,20}$ .

In het speciaal geval met  $k = 2$  steekproeven laat zich aantonen dat de verdeling  $F_{1,n}$  juist de verdeling van het kwadraat  $T^2$  van een stochast  $T$  met Student- $t$  verdeling met  $n$  vrijheidsgraden is.

### De $F$ -toets

Analoog met de andere toetsen bepaalt men ook voor de  $F$ -verdeling  $F_{m,n}$  met  $m$  en  $n$  vrijheidsgraden kritieke  $f$ -waarden  $f_\alpha = f_{m,n,\alpha}$ , zo dat onder de aanname van de nulhypothese steekproeven met een  $F$ -waarde die hoger is dan  $f_\alpha$  alleen maar met kans  $\alpha$  optreden, dus zo dat

$$P(F > f_\alpha) = \alpha.$$

Omdat bij een concreet probleem de aantallen  $m$  en  $n$  van vrijheidsgraden meestal duidelijk zijn, worden deze indices meestal onderdrukt en worden de kritieke waarden met  $f_\alpha$  in plaats van  $f_{m,n,\alpha}$  genoteerd.

Onder de aanname van de nulhypothese verwacht men een  $F$ -waarde rond 1, terwijl onder de aanname van de alternatieve hypothese dat  $\alpha_i \neq 0$  een waarde  $\frac{s_a^2}{s_b^2} > 1$  te verwachten is. Daarom zijn de  $f_\alpha > 1$  en bij de  $F$ -toets met onbetrouwbaarheid  $\alpha$  wordt de nulhypothese verworpen als  $\frac{s_a^2}{s_b^2} > f_\alpha$  is.

In Tabel 4 en Tabel 5 aan het eind van dit hoofdstuk zijn een aantal kritieke waarden voor de  $F$ -verdelingen op onbetrouwbaarheidslevels 0.05 en 0.01 aangegeven. De kritieke waarden zijn in de vorm van tabellen voor de verschillende aantallen van vrijheidsgraden aangegeven, waarbij de waarde voor de verdeling  $F_{m,n}$  in kolom  $m$  van rij  $n$  te vinden is (in de tabellen heten de vrijheidsgraden  $\nu_1$  en  $\nu_2$  in plaats van  $m$  en  $n$ ).

De naam *variantie-analyse* voor de  $F$ -toets zou inmiddels duidelijk zijn. Men analyseert hoe veel van de totale kwadratische afwijking door de



afwijkingen *binnen* de steekproeven veroorzaakt wordt en hoeveel door de afwijkingen *tussen* de steekproeven. Als het laatste relatief gezien te veel wordt, geeft dit evidentie tegen de nulhypothese dat de verdelingen van de steekproeven alle hetzelfde gemiddelde hebben.

Het cruciale punt is dat bij de opsplitsing van de totale kwadratische afwijking in de twee componenten  $V_b$  en  $V_t$  de component  $V_b$  niet gevoelig tegenover verschillen van de populatiegemiddelden is, terwijl de component  $V_t$  dit juist wel is.

Het is opmerkelijk dat de  $F$ -toets een toets op gelijkheid van *gemiddelden* is die bij de berekeningen gebruik maakt van *varianties*.

Alhoewel voor de verwachtingswaarden van de schatters  $S_b^2$  en  $S_t^2$  geldt dat

$$\sigma^2 = E[S_b^2] \leq E[S_t^2] = \sigma^2 + \frac{1}{k-1} \sum_i n_i \alpha_i^2$$

kan het voor concrete steekproeven natuurlijk wel gebeuren dat  $s_t^2 < s_b^2$  en dus  $f = \frac{s_t^2}{s_b^2} < 1$ . Aan de hand van de voorbeelden van  $F$ -verdelingen in Figuur 18 is duidelijk te zien, dat er een zekere kans op  $F$ -waarden kleiner dan 1 bestaat.

Maar als de waarde van  $s_t^2$  zo veel kleiner is dan de waarde van  $s_b^2$  dat de kans op het toevallige optreden van zo'n kleine  $F$ -waarde zeer klein is, moet men controleren of de hele opzet van de analyse aan de benodigde voorwaarden voldoet. Het eerste punt om op te letten is de aanname dat alle steekproeven dezelfde variantie  $\sigma^2$  hebben. Hiervoor laten zich bijvoorbeeld betrouwbaarheidsintervallen voor de steekproefvarianties bepalen. Vaak zijn de enkele steekproeven echter redelijk klein zo dat deze betrouwbaarheidsintervallen behoorlijk groot zijn, meestal moet daarom enigszins nauwkeurig gekeken worden of het überhaupt zinvol is om de variantie-analyse toe te passen.

### 6.3 Variantie-analyse tabellen

De resultaten van een variantie-analyse worden meestal in een bepaalde soort tabellen aangegeven, die er typisch als volgt uit zien:

bron	vrijheids- graden	kwadratische afwijkingen	schattingen voor $\sigma^2$	$F$ -waarde	$P$ -waarde
tussen	$k - 1$	$\sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2$	$s_t^2$	$f = \frac{s_t^2}{s_b^2}$	$P(F_{k-1, n-k} > f)$
binnen	$n - k$	$\sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2$	$s_b^2$		
totaal	$n - 1$	$\sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x})^2$			

**Voorbeeld:** Bij vier leveranciers van een zekere stof worden steekproeven genomen en de zuiverheid van de stof bepaald (die in procent aangegeven wordt). De vraag is, of er evidentie tegen de nulhypothese is, dat de vier leveranciers even zuiver produceren. De steekproeven en hun gemiddelden zijn in de volgende tabel aangegeven:

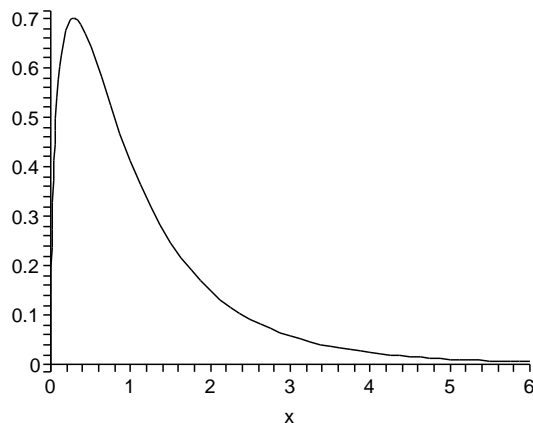
leverancier	steekproeven				$n_i$	$\bar{x}_i$
1	99.3	99.4	98.8	99.4	4	99.225
2	99.8	97.4	98.9	99.0	5	98.740
3	98.2	97.2	96.4	98.3	4	97.525
4	98.7	99.6	99.2		3	99.167
totaal					16	98.638

We hebben  $k = 4$  leveranciers en  $n = 16$  steekproeven, daarom hebben we de  $F$ -verdeling met 3 en 12 vrijheidsgraden nodig. Uit deze gegevens berekent men de volgende variantie-analyse tabel:

bron	vrijheids- graden	kwadratische afwijkingen	schattingen voor $\sigma^2$	$F$ -waarde	$P$ -waarde
tussen	3	7.224	2.408	4.726	0.021
binnen	12	6.114	0.509		
totaal	15	13.337			

Afhankelijk van de gebruikte software wordt de  $P$ -waarde niet berekend, in dit geval vindt men in de tabellen voor  $\alpha = 0.05$  de kritieke waarde  $f_{3,12,0.05} = 3.49$  en voor  $\alpha = 0.01$  de kritieke waarde  $f_{3,12,0.01} = 5.95$ . Men zou dus op een onbetrouwbaarheidslevel van 5% de nulhypothese wel kunnen verwerpen, maar op een onbetrouwbaarheidslevel van 1% niet meer. De  $P$ -waarde van 0.021 zegt juist, dat onder de aanname van de nulhypothese slechts 2.1% van de steekproeven een  $F$ -waarde van 4.726 of groter zouden opleveren.

We zien ook in Figuur 19 dat de gevonden waarde 4.726 van  $F$  al redelijk ver in de staart van de  $F$ -verdeling ligt, dus zou men in dit geval in ieder geval twijfels hebben of de leveranciers even zuivere stof produceren.



Figuur 19:  $F$ -verdeling met 3 en 12 vrijheidsgraden.

Als de nulhypothese dat alle gemiddelden  $\mu_i$  hetzelfde zijn, verworpen wordt, is het natuurlijk interessant, om een schatting voor de verschillende gemiddelden op te stellen. Deze schattingen zijn natuurlijk juist de steekproefgemiddelden  $\bar{x}_i$ , maar de interessante vraag is, betrouwbaarheidsintervallen voor deze schattingen te vinden.

Maar hiervoor hebben we in principe al alles berekend: De stochast  $S_b^2 = \frac{1}{n-k} V_b$  voor de afwijkingen binnen de steekproeven geeft de *gepoolde variantie*  $s^2$  als schatting voor  $\sigma^2$  aan. Deze schatting berust op  $\sum_{i=1}^k (n_i - 1) = n - k$  vrijheidsgraden en de *standaardfout* voor de steekproefgemiddelden is dus  $\sqrt{\frac{s^2}{n-k}}$ . Met behulp van de Student  $t$ -verdeling met  $n - k$  vrijheidsgraden vinden we zo een betrouwbaarheidsinterval rond ieder van de steekproefgemiddelden, op een onbetrouwbaarheidslevel  $\alpha$  is dit:

$$\left[ \bar{x}_i - t_{n-k, \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n-k}}, \bar{x}_i + t_{n-k, \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{s^2}{n-k}} \right].$$

In het voorbeeld is  $s^2 = 0.509$ ,  $n - k = 12$  en op onbetrouwbaarheidslevel  $\alpha = 0.05$  vinden we de kritieke  $t$ -waarde  $t_{12, 0.025} = 2.18$ .

Nu berekent men dat

$$t_{12, 0.025} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{12}} = 0.449,$$

dus vinden we als betrouwbaarheidsintervallen voor de gemiddelden in het voorbeeld:

$$\begin{aligned} \mu_1 &\in [98.776, 99.674]; \\ \mu_2 &\in [98.291, 99.189]; \\ \mu_3 &\in [97.076, 97.974]; \\ \mu_4 &\in [98.718, 99.616]. \end{aligned}$$

Het valt op dat het betrouwbaarheidsinterval voor  $\mu_3$  met geen van de andere drie intervallen overlapt, de grote afwijking van het gemiddelde van deze steekproef tegenover de afwijkingen binnen de steekproeven is de reden voor het verwerpen van de nulhypothese dat alle gemiddelden hetzelfde zijn. In ieder geval zou men op deze manier tot de beslissing komen dat de zuiverheid bij leverancier 3 lager is dan bij de andere drie leveranciers.

Als men de variantie-analyse zonder de derde steekproef herhaalt, krijgt men een totaal andere situatie. De variantie-analyse tabel wordt dan:

bron	vrijheids- graden	kwadratische afwijkingen	schattingen voor $\sigma^2$	$F$ - waarde	$P$ - waarde
tussen	2	0.623	0.312	0.761	0.495
binnen	9	3.686	0.410		
totaal	11	4.309			

De  $F$ -waarde ligt dus bijna in het midden van de verdeling  $F_{2,9}$  en dus is er geen enkele aanleiding om de nulhypothese te verwerpen dat de zuiverheid bij de leveranciers 1, 2 en 4 hetzelfde is.

BELANGRIJKE BEGRIPPEN IN DEZE LES

- variantie-analyse (ANOVA)
- afwijkingen binnen en tussen steekproeven
- $F$ -verdeling van Fisher
- $F$ -toets
- variantie-analyse tabel

OPGAVEN

35. Ga na dat in het geval van twee steekproeven de  $F$ -toets equivalent is met de toets op gelijkheid van gemiddelden met behulp van de Student  $t$ -verdeling die we in Les 4 hebben behandeld.

Aanwijzing: De twee steekproeven zijn  $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}$  (van omvang  $n_1$ ) en  $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}$  (van omvang  $n_2$ ). De steekproefgemiddelden zijn  $\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}(x_{11} + \dots + x_{1n_1})$  en  $\bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}(x_{21} + \dots + x_{2n_2})$  en de steekproefvarianties zijn  $s_1^2 = \frac{1}{n_1-1}((x_{11} - \bar{x}_1)^2 + \dots + (x_{1n_1} - \bar{x}_1)^2)$  en  $s_2^2 = \frac{1}{n_2-1}((x_{21} - \bar{x}_2)^2 + \dots + (x_{2n_2} - \bar{x}_2)^2)$ . Het globale gemiddelde over beide steekproeven is  $\bar{x} = \frac{1}{n_1+n_2}((x_{11} + \dots + x_{1n_1}) + (x_{21} + \dots + x_{2n_2})) = \frac{1}{n_1+n_2}(n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2)$ .

We gaan ervan uit dat de steekproeven afkomstig zijn van populaties met dezelfde variantie  $\sigma^2$ , daarom kunnen we de *gepoolde variantie*  $s^2$  van de twee steekproeven aangeven door  $s^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$ .

In Les 4 hebben we aangetoond dat we de nulhypothese  $H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2$  op onbetrouwbaarheidslevel  $\alpha$  verwerpen als

$$t := \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{s} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} > t_{n_1+n_2-2, \frac{\alpha}{2}}.$$

Laat nu zien dat voor de toetsingsgrootheid  $f = \frac{s_t^2}{s_b^2}$  in de  $F$ -toets geldt dat

$$f = t^2 = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{s^2} \cdot \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}.$$

Hiervoor is het nuttig om op te merken dat (volgens de definities)  $s_t^2 = n_1(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x})^2$  en  $s_b^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2}((n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2)$ .

36. Bij een crash-test met telkens 6 auto's van 3 verschillende merken wordt gekeken, wat de herstelling van de auto's kost. Er worden de volgende resultaten verkregen:

	kosten					
A	200€	50€	150€	75€	100€	250€
B	75€	470€	20€	140€	220€	210€
C	120€	570€	600€	450€	700€	350€

Kan op grond van deze waarden de nulhypothese dat de gemiddelde kosten bij iedere merk hetzelfde zijn op een onbetrouwbaarheidslevel van  $\alpha = 0.05$  verworpen worden? Hoe zit het met  $\alpha = 0.01$ ?

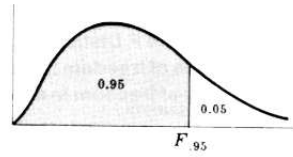
Laat zien dat hiervoor de  $F$ -verdeling  $F_{2,15}$  met 2 en 15 vrijheidsgraden relevant is. De benodigde kritieke waarden voor deze  $F$ -verdeling zijn volgens tabellen 4 en 5 gegeven door  $f_{2,15,0.05} = 3.68$  en  $f_{2,15,0.01} = 6.36$ .

37. In een kogellagerfabriek beschikt men over 5 machines voor het vervaardigen van kogels. Voor een aantal toevallig getrokken kogels bepaalde men de diameter en kreeg de volgende resultaten:

machine	diameter van de kogels (in $mm$ )				
1	15.281	15.325	15.305	15.292	15.317
2	15.360	15.337			
3	15.325	15.348	15.316	15.303	
4	15.305	15.327			
5	15.333	15.340	15.321		

- (i) Toets op onbetrouwbaarheidslevel  $\alpha = 0.05$  de nulhypothese dat alle machines dezelfde diameter opleveren. (De benodigde kritieke waarde van de  $F$ -verdeling is  $f_{4,11,0.05} = 3.36$ .)
- (ii) Bereken het tweezijdige betrouwbaarheidsinterval op onbetrouwbaarheidslevel  $\alpha = 0.10$  voor het verschil van de gemiddelde diameter van de kogels afkomstig van machines 1 en 3. (Hiervoor is geen variantie-analyse nodig.)

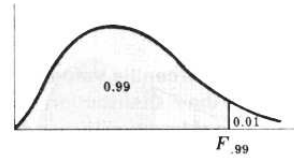
**95th Percentile Values  
for the F Distribution**  
( $\nu_1$  degrees of freedom in numerator)  
( $\nu_2$  degrees of freedom in denominator)



$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Tabel 4: Kritieke waarden voor  $F$ -verdelingen op onbetrouwbaarheidslevel  $\alpha = 0.05$

**99th Percentile Values  
for the F Distribution**  
( $\nu_1$  degrees of freedom in numerator)  
( $\nu_2$  degrees of freedom in denominator)



$\nu_2 \backslash \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	$\infty$
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6023	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
$\infty$	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Tabel 5: Kritieke waarden voor  $F$ -verdelingen op onbetrouwbaarheidslevel  $\alpha = 0.01$