Opgaven voor Calculus

Opgave 1.
Bepaal de afgeleiden van de volgende functies:

$$\text{(i) } f(x) := \sin(x+x^2), \quad \text{(ii) } f(x) := \sin(x)+\sin(x^2), \quad \text{(iii) } f(x) := \sin(\cos(x)),$$

$$\text{(iv) } f(x) := \sin(\sin(x)), \quad \text{(v) } f(x) := \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right), \quad \text{(vi) } f(x) := \frac{\sin(\cos(x))}{x},$$

$$\text{(vii) } f(x) := \sin(x+\sin(x)), \qquad \text{(viii) } f(x) := \sin(\cos(\sin(x))).$$

Opgave 2.
Als je gewone afgeleiden vervelend vindt, zou je het misschien interessanter vinden om van de volgende functies de afgeleide $f'(x)$ te berekenen:

$$\text{(i) } f(x) := \sin((x+1)^2(x+2)), \qquad \text{(ii) } f(x) := \sin^3(x^2+\sin(x)),$$

$$\text{(iii) } f(x) := \sin^2((x+\sin(x))^2), \qquad \text{(iv) } f(x) := \sin\left(\frac{x^3}{\cos(x^3)}\right),$$

$$\text{(v) } f(x) := \sin(x\sin(x))+\sin(\sin(x^2)), \qquad \text{(vi) } f(x) := \sin^2(x)\sin(x^2)\sin^2(x^2),$$

$$\text{(vii) } f(x) := (x+\sin^5(x))^6, \qquad \text{(viii) } f(x) := \sin(\sin(\sin(\sin(\sin(x))))),$$

$$\text{(ix) } f(x) := \sin((\sin^7(x^7)+1)^7), \qquad \text{(x) } f(x) := (((x^2+x)^3+x)^4+x)^5,$$

$$\text{(xi) } f(x) := \sin(x^2+\sin(x^2+\sin(x^2))), \ \text{(xii) } f(x) := \sin(6\cos(6\sin(6\cos(6x)))),$$

$$\text{(xiii) } f(x) := \frac{\sin(x^2)\sin^2(x)}{1+\sin(x)}, \qquad \text{(xiv) } f(x) := \sin\left(\frac{x^3}{\sin(\frac{x^3}{\sin(x)})}\right).$$

Opgave 3.
Vind lokale en globale minima en maxima voor de volgende functies (die op $\mathbb{R}$ met uitzondering van eventuele nulpunten van de noemer gedefinieerd zijn):

$$\text{(i) } f(x) := x^3-x, \qquad \text{(ii) } f(x) := x^4-2x^2, \qquad \text{(iii) } f(x) := \frac{x^2-2x+2}{x-1},$$

$$\text{(iv) } f(x) := x^3-x^2-8x+1, \qquad \text{(v) } f(x) := x^5+x+1, \qquad \text{(vi) } f(x) := 2+x^{\frac{2}{3}},$$

$$\text{(vii) } f(x) := x^{\frac{4}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}, \qquad \text{(viii) } f(x) := x^3+\frac{48}{x},$$

Opgave 4.
Een ellips wordt beschreven door de vergelijking $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. De parameters a en b geven de lengten van de twee halfassen van de ellips. Voor $a=b=1$ is de ellips een cirkel. We bekijken rechthoeken met zijden evenwijdig aan de x- en y-assen, die in de ellips liggen. Bepaal de afmetingen van de rechthoeken: (a) met maximale oppervlakte, (b) met maximale omvang, die in de ellips passen.

Opgave 5.
Een bal wordt uit een hoogte h_0 met snelheid v_0 verticaal omhoog of omlaag gegooid (als $v_0 > 0$ wordt hij omhoog gegooid, als $v_0 < 0$ omlaag). De hoogte van de bal wordt (afhankelijk van de tijd) door een functie $h(t)$ beschreven, voor de snelheid $v(t)$ geldt $v(t) = h'(t)$ en de acceleratie $a(t) = v'(t) = -g$ is constant (we nemen de acceleratie met een minteken, omdat deze omlaag gericht is, de waarde van g is ongeveer $9.81 m/s^2$).

(i) Toon aan dat $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$.

(ii) Wat is de maximale hoogte die de bal bereikt?

(iii) Wat is de snelheid waarmee de bal de grond raakt?

Opgave 6.
Bepaal primitieven voor de volgende functies:

$$\text{(i) } f(x) := \frac{a^x}{b^x}, \qquad \text{(ii) } f(x) := \frac{1}{1+\sin(x)}, \qquad \text{(iii) } f(x) := \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Opgave 7.
Bepaal de volgende integralen (bijvoorbeeld door partiële integratie):

$$\text{(i) } \int \cos^3(x)\,dx, \text{ (ii) } \int x^3 \exp(x^2)\,dx, \text{ (iii) } \int x^2 \sin(x)\,dx, \text{ (iv) } \int x \log^2(x)\,dx.$$

Opgave 8.
Bepaal de volgende integralen (bijvoorbeeld door substitutie):

$$\text{(i) } \int \frac{\log(\log(x))}{x}\,dx, \qquad \text{(ii) } \int \frac{\exp(x)}{\exp(2x) + 2\exp(x) + 1}\,dx,$$

$$\text{(iii) } \int \exp(\exp(x))\exp(x)\,dx, \qquad \text{(iv) } \int x\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Opgave 9.
Bereken de volgende bepaalde integralen:

$$\text{(i) } \int_0^2 (2+x)\,dx, \qquad \text{(ii) } \int_0^2 (2-x)^2\,dx, \qquad \text{(iii) } \int_0^3 (3 - 2x + x^2)\,dx,$$

$$\text{(iv) } \int_{-1}^2 x(1-x^2)\,dx, \qquad \text{(v) } \int_1^4 \sqrt{x}(1-x)\,dx, \qquad \text{(vi) } \int_1^8 \sqrt{1+3x}\,dx,$$

$$\text{(vii) } \int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx, \qquad \text{(viii) } \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx, \qquad \text{(ix) } \int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx,$$

$$\text{(x) } \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx, \qquad \text{(xi) } \int_3^4 \frac{1}{25-x^2}\,dx, \qquad \text{(xii) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin(3x)\,dx.$$

Opgave 10.
Bereken de volgende bepaalde integralen:

$$\text{(i) } \int_3^{11} \sqrt{2x+3}\,dx, \qquad \text{(ii) } \int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx, \qquad \text{(iii) } \int_0^{\sqrt{2}} x^3 \exp(x^2)\,dx.$$