Opgaven voor Kansrekening

Opgave 1.
Je hebt 4 verschillende wiskunde boeken, 6 psychologie boeken en 2 letterkundige boeken. Hoeveel manieren zijn er om deze twaalf boeken op een boord te plaatsen als:

(i) je een genie bent en geen orde nodig hebt,

(ii) je tenminste de wiskunde boeken naast elkaar plaatst,

(iii) de boeken van elk vakgebied naast elkaar moeten staan?

Opgave 2.
Hoeveel verschillende getallen van 4 cijfers kan je uit de zestien hexadecimale 'cijfers'
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ maken?

(i) Hoeveel van deze getallen zijn 'echte' 4-cijfer getallen, dus hebben de eerste cijfer $\neq 0$?

(ii) Hoeveel van de getallen uit (i) hebben vier verschillende cijfers?

(iii) Hoeveel van de getallen uit (ii) eindigen op het cijfer 0?

(iv) Hoeveel van de getallen uit (ii) hebben opstijgende cijfers?

Opgave 3.
Een Nederlands kentekenplaatje bestaat uit twee groepen van twee letters en een groep van twee cijfers. De groep van cijfers mag voor, tussen of achter de groepen met letters staan. Verder worden bij de letters geen klinkers gebruikt. Bepaal het aantal mogelijke nummerborden.

Opgave 4.
Uit een werkgroep van 8 mannen en 6 vrouwen moet een commissie van 3 mannen en 4 vrouwen gekozen worden. Hoeveel verschillende mogelijkheden bestaan er voor de commissie?

Opgave 5.
Een zekere faculteit heeft 6 hoogleraren, 8 UHD's, 4 UD's en 5 AIO's. In de feestcommissie van de faculteit zitten er 2 hoogleraren, 4 UHD's, 3 UD's en 3 AIO's. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor de commissie? Hoe veranderd het aantal als een van de hoogleraren een begenadigde zanger en een van de UHD's (oorspronkelijk) een bierbrouwer is en deze twee per se in de commissie moeten zitten?

Opgave 6.
In een vaas zitten 8 rode, 3 witte en 9 blauwe knikkers. Je trekt drie keer een knikker zonder terugleggen. Bepaal de volgende kansen:

(i) alle drie getrokken knikkers zijn rood,

(ii) alle drie getrokken knikkers zijn wit,

(iii) twee van de getrokken knikkers zijn rood, de derde is blauw,

(iv) minstens een van de getrokken knikkers is wit,

(v) bij de getrokken knikkers is een van elke kleur,

(vi) de knikkers worden in de volgorde rood, wit, blauw getrokken.

Opgave 7.
Bij de schakers A en B wint A een spel gemiddeld met kans $\frac{1}{2}$ en B wint met kans $\frac{1}{3}$, de andere partijtjes eindigen in gelijkspel. Vanavond spelen A en B een match van drie spelen. Wat is de kans dat (a) A alle drie spelen wint, (b) twee spelen in een gelijkspel eindigen, (c) A en B afwisselend winnen, (d) B minstens een spel wint?

Opgave 8.
Een oneerlijke dobbelsteen is zo gemaakt dat 3 drie keer zo vaak valt als 4 en 2 twee keer zo vaak als 5. Verder vallen 1, 2, 3 en 6 even vaak.

(i) Geef een kansverdeling voor het werpen van deze dobbelsteen aan.

(ii) Bepaal de kans dat bij twee keer werpen van deze dobbelsteen de som minstens 11 is.

Opgave 9.
In Nijmegen zijn er 800 families met vijf kinderen. Hoeveel families met (a) 3 meisjes, (b) 5 meisjes, (c) 2 of 3 jongens verwacht je? (Je kunt ervan uit gaan dat er even veel jongens als meisjes geboren worden.)

Opgave 10.
Een rad van avontuur heeft vier sectoren waarin het rad met dezelfde kans tot stilstand komt. Het rad wordt gedraaid tot dat het in sector I stopt, maar hooguit 10 keer. Bepaal de kansen voor de volgende gebeurtenissen:

A_i : Het rad stopt bij de i-de draaiing in sector I.

B : Het rad stopt helemaal niet in sector I.

C : Het aantal draaiingen is even.

Opgave 11.
In een vaas zitten 7 witte en 1 rode knikkers. Je trekt herhaald een knikker, bekijkt de kleur en legt hem vervolgens terug. Bepaal de kans dat je bij 8 pogingen precies 3 keer de rode knikker pakt. Gebruik hiervoor (a) de binomiale verdeling, (b) de benadering door de Poisson-verdeling.

Hoe zit het met de resultaten als 15 witte en 1 rode knikker hebt en 16 pogingen doet? En hoe zit het bij 79 witte en 1 rode knikker en 80 pogingen?

Opgave 12.
In vaas I zitten 3 rode en 5 witte knikkers, in vaas II zijn er 4 rode en 2 witte. Er wordt een knikker willekeurig uit vaas I gegrepen en in vaas II gelegd. Vervolgens wordt er een knikker uit vaas II getrokken. Wat is de kans dat deze knikker wit is?

Opgave 13.
In een vaas zitten 3 rode en 2 blauwe knikkers, in een tweede vaas zitten 2 rode en 8 blauwe knikkers. Er wordt eerst een munt geworpen om te bepalen uit welke vaas een knikker getrokken wordt: als kop valt uit de eerste en als munt valt uit de tweede.

(i) Bepaal de kans dat een rode knikker getrokken wordt.

(ii) Stel dat je niet hebt gezien of kop of munt gevallen is, maar wel dat een rode knikker getrokken wordt. Wat is de kans dat kop is gevallen, dus dat de knikker uit de eerste vaas is getrokken?

Opgave 14.
Een huis is voorzien met een alarminstallatie. Als er een inbraak is, zal er met 96% kans een alarm komen, maar ook als er geen inbraak is, is er (door aardbevingen of andere storingen) met een kans van 0.1% een alarm. In de woonwijk van het huis is de kans op een inbraak 0.3%. Vannacht is er een alarm. Hoe groot is de kans dat er daadwerkelijk een inbraak plaats vindt?

Opgave 15.
Er wordt twee keer met een eerlijke dobbelsteen gedobbeld. De uitkomsten A, B en C zijn:

A : Er wordt twee keer hetzelfde getal gedobbeld.

B : Het eerste getal is 1 of 6.

C : Het tweede getal is even.

Zijn A, B, C onafhankelijk? Zijn de uitkomsten paarsgewijs onafhankelijk?

Opgave 16.
De goedkope random-trein vertrekt op een willekeurig tijdstip tussen 10.00 en 10.30 uur. Je beslist zelf ook op een willekeurig tijdstip in dit half uur op het station op te dagen en hooguit 5 minuten te wachten. Als de trein in dit interval niet komt, pak je een taxi om nog op tijd naar het college te komen. Wat is de kans dat je met de trein zult rijden?

Opgave 17.
Een stok wordt willekeurig in twee stukken gehakt. Wat is de kans dat het ene stuk minstens twee keer zo lang is als het andere?

Opgave 18.
Op een stok van $1m$ lengte kies je willekeurig twee punten en hakt vervolgens de stok op deze twee punten door. Wat is de kans dat je uit de drie zo verkregen stukken een driehoek kunt vormen? (Je kunt een driehoek vormen dan en slechts dan als de som van twee stukken altijd groter is dan het derde stuk.)

De net verkregen kans vind je te klein, daarom kies je voor een andere aanpak. Eerst hak je de stok op een willekeurig punt in twee delen en vervolgens pak je het grotere stuk en hak dit nog eens op een willekeurig gekozen punt door. Wat is nu de kans dat je uit de drie stukken een driehoek kunt vormen?

Opgave 19.
De kans dat een student bij het grote lustrumfeest een bier krijgt is 99.2% (soms is het bier op, soms denkt de baas dat de student geen 16 jaar oud is). Een slimme verzekeringsmaatschappij biedt eenmalig een verzekeringspolis, waar je voor een premie van 10 € tegen bierarmoede verzekerd bent. In het geval dat je inderdaad geen bier op het feest krijgt betaalt de verzekering 1000 €. Wat is de verwachte winst van de verzekeringsmaatschappij bij elk afgesloten polis?

Opgave 20.
Er wordt met twee (eerlijke) dobbelstenen gedobbeld. De stochast X beschrijft het maximale getal in een worp. Bereken $P(X = k)$ voor $k = 1, \ldots, 6$ en de verwachtingswaarde $E(X)$.

Bekijk hetzelfde probleem voor drie dobbelstenen.

Opgave 21.
Bij een bloedtest van 10 personen is bekend dat 2 een zeker virus in hun bloed hebben. Om het aantal tests in te krimpen wordt te volgende methode toegepast: De 10 personen worden willekeurig in twee groepen van 5 personen ingedeeld. Het bloed van de personen in een groep wordt vermengd en getest. Als het virus in het mengsel gevonden wordt, wordt het bloed van elk persoon in de groep apart getest.

Beschrijf een geschikte ruimte Ω met een kansverdeling P, zo dat het aantal van bloedtests een stochast op deze kansruimte is. Bereken de verwachtingswaarde voor het aantal bloedtests.

Opgave 22.
Een winnaar bij een televisiequiz krijgt een van drie prijzen. De prijzen worden één voor één aangeboden en de winnaar mag of een prijs accepteren (dan worden de verdere prijzen niet meer getoond) of weigeren (dan mag hij op deze prijs niet meer terug komen). Stel dat de winnaar een duidelijke rangschikking voor de prijzen heeft. Er zijn nu twee voor de hand liggende strategieën:

(A) Kies in ieder geval de eerste prijs.

(B) Als de tweede prijs aantrekkelijker is dan de eerste, kies de tweede, als niet, kies de derde.

Bepaal voor elk van de twee strategieën de kansen om de meest aantrekkelijke en de minst aantrekkelijke prijs te kiezen.

Opgave 23.
Er wordt twee keer met een dobbelsteen gedobbeld. De stochast X_1 beschrijft het aantal ogen in de eerste worp, de stochast X_2 het aantal ogen in de tweede. Verder geeft $U := \min(X_1, X_2)$ het kleinste en $V := \max(X_1, X_2)$ het grootste van de twee aantallen.

(i) Zijn U en V onafhankelijk?

(ii) Bepaal de kansverdeling van U.

(iii) Bepaal de verwachtingswaarden $E(U)$ en $E(U + V)$.

(iv) Bepaal de voorwaardelijke kans $P(X_1 = 3 \mid U = 3)$.